Optimisation de plans de financement immobiliers

De la recherche opérationnelle en actuariat bancaire

Frédéric GARDI & Alain DAVID

EXPERIAN–PROLOGIA,
Parc Scientifique et Technologique de Luminy,
case 919, bâtiment CCIMP, 13009 Marseille, France
{frederic.gardi,alain.david}@experian-prologia.fr

Résumé

Bien que le champ d'application traditionnel de la recherche opérationnelle demeure autour des métiers de l'industrie, de nombreux problèmes émergent dans les secteurs de la finance, de la banque et de l'assurance, faisant apparaître un besoin d'aide à la décision. Dans le domaine financier, plusieurs problèmes ont été étudiés dont l'optimisation de portefeuille devenu un classique du genre. Les applications de la recherche opérationnelle dans les domaines de la banque ou de l'assurance sont plus rares. Dans cette note, nous abordons un problème d'actualité dans le secteur bancaire français: l'optimisation de plans de financement immobiliers. Le travail que nous présentons a été effectué dans le cadre du développement par la société EXPERIAN–PROLOGIA d'une nouvelle application d'instruction de prêts immobiliers pour une grande banque française. Le module d'optimisation de plans de financement, au cœur de cette application, est aujourd'hui en production dans le réseau des 2000 agences de cette grande banque.

Abstract

Although the traditional field of application of operations research remains around the trades of industry, many problems rise in the sectors of finance, bank and insurance, revealing a need for decision-making aid. In the financial field, several problems were studied like portfolio optimization which became a classic. The applications of operations research in the fields of bank or insurance are rarer. In this note, a topical problem in the French banking sector is approached: the optimization of real-estate financial plans. The present work was done in the context of the development by the firm EXPERIAN–PROLOGIA of a new application for mortgages processing for an important French bank. The module for financial plans optimization, in the heart of this application, is now in production in the network of the 2000 agencies of this important bank.

1 Introduction

La recherche opérationnelle, discipline dédiée à l'analyse des phénomènes organisationnels pour l'élaboration de meilleures décisions, est aujourd'hui considérée comme une branche à part entière des mathématiques appliquées. La RO, comme on la surnomme, se situe en fait au carrefour de plusieurs sciences comme l'économie, la gestion, les mathématiques et l'informatique. Bien que le champ d'application traditionnel de la recherche opérationnelle demeure autour des métiers de l'industrie, de nombreux problèmes émergent dans les secteurs de la finance, de la banque et de l'assurance, faisant apparaître un besoin d'aide à la décision. Dans le domaine financier, plusieurs problèmes ont été étudiés dont l'optimisation de portefeuille (Zenios, 1993), devenu un classique du genre, ou encore l'ordonnancement des mouvements de trésorerie (Cramer et Ponssard, 1977 ; Carlier, 1984). Les applications de la recherche opérationnelle dans les domaines de la banque ou de l'assurance sont plus rares : les livres consacrées à leurs fondements mathématiques ne mentionnent rien à ce sujet (Bonneau et Wiszniak, 1992 ; Girard, 1992) et il est difficile de trouver des articles traitant de ces sujets dans la littérature scientifique ou spécialisée. Pourtant, les métiers de la banque et de l'assurance, en particulier l'actuariat, sont des métiers complexes, souvent très techniques, dans lesquels la recherche opérationnelle encore absente est amenée à jouer un rôle important. En effet, la complexité croissante des produits ainsi que des réglementations qui les régissent, obligent les différents acteurs du domaine à s'équiper d'outils informatiques avancés d'aide à la décision, voire d'optimisation, pour faire face à la concurrence. Dans cette note, nous abordons une problématique d'actualité dans le secteur bancaire français : l'optimisation de plans de financement immobiliers.

Le financement d'une opération immobilière requiert d'importantes sommes d'argent, généralement prêtées par une banque ou un organisme de crédit. Si certaines banques peuvent proposer des financements adossés à des assemblages de prêts, ceux-ci demeurent limités tant par la technicité de ces prêts que par les outils de calculs classiques qui aident à les composer. Majoritairement, les plans de financement se contentent en fait d'un seul prêt dont l'échéance est constante sur la durée de celui-ci. Une grande banque française, qui a préalablement fait évoluer sa gamme de produits immobiliers vers des technicités permettant plus de souplesse dans le remboursement, souhaite pratiquer des assemblages de prêts afin de proposer des plans de financement les plus compétitifs possibles. Pour aider les chargés de clientèle dans ce travail et être certain de proposer les meilleures solutions à ses clients, cette banque a décidé d'intégrer à son nouvel outil informatique d'instruction de prêts immobiliers – entièrement développé par EXPERIAN–PROLOGIA – un module d'optimisation de plans de financement immobiliers. Ce module, qui a demandé près de deux ans de recherche et développement, est entré en production dans le réseau des 2000 agences de cette grande banque au début de l'année 2006.

2 Présentation du problème

Un prêt possède, de manière générale, les caractéristiques suivantes : un montant minimum $M_{\min}$, un montant maximum $M_{\max}$, une durée minimum $D_{\min}$, une durée maximum $D_{\max}$, un montant d'amortissement mensuel minimum $C_{\min}$ et pour chaque durée d possible, le taux proportionnel mensuel T_d associé à cette durée. Précisons que les montants sont exprimés en centimes, les durées en mois et les taux en %. Lorsqu'un prêt est inclus dans un plan de financement, son montant m, sa durée d et ses échéances mensuelles de remboursement $e_1,\ldots,e_d$ doivent satisfaire les contraintes suivantes, où $[x]$ dénote l'entier le plus proche de x :

(1) $M_{\min} \leq m \leq M_{\max}$

(2) $D_{\min} \leq d \leq D_{\max}$

(3) $c_1 = e_1 - [T_d \times m]$

(4) $c_j = e_j - [T_d \times (m - \sum_{k=1}^{j-1} c_k)]$ pour tout $j = 2,\ldots,d$

(5) $m = \sum_{j=1}^{d} c_j$

(6) $c_1,\ldots,c_d \geq C_{\min}$

Les inégalités (1) et (2) forcent le montant et la durée à varier entre les minimum et maximum autorisés. Les équations (3) et (4) décrivent l'amortissement du capital emprunté m sur une durée d. Les variables $c_1,\ldots,c_d$ représentent la part du capital remboursé chaque mois par l'emprunteur, les intérêts mensuels versés par ce dernier étant donnés par l'expression $[T_d \times (m - \sum_{k=1}^{j-1} c_k)]$. L'égalité (5) garantit que la totalité du capital emprunté a bien été amortie après le paiement de la dernière échéance. Enfin, les inégalités (6) imposent un remboursement mensuel minimum de capital. Les arrondis effectués ici le sont pour des raisons à la fois réglementaires et commerciales : il est impératif que le client puisse connaître la composition exacte des mensualités qu'il paye (en particulier la part des intérêts versés et la part du capital amorti), et ce au centime près.

Une autre caractéristique fondamentale d'un prêt est le profil de ses échéances. Deux types de profil sont généralement considérés : constant ou libre. Les échéances d'un prêt à profil constant doivent toutes être égales sur la durée de celui-ci, tandis que celles d'un prêt à profil libre peuvent varier librement au cours de sa durée. Toutefois, pour des raisons commerciales, il n'est pas souhaitable que l'évolution des échéances d'un prêt à profil libre soit trop chaotique. Un prêt à profil libre devrait idéalement comporter un nombre de paliers se limitant aux variations de la capacité de remboursement du client (on appelle palier une succession d'échéances de même montant). Par la suite, nous verrons qu'il est inutile d'intégrer explicitement cette contrainte « métier » au modèle.

Certains prêts, subventionnés ou garantis par l'État français, ont des caractéristiques réglementaires plus complexes. Les prêts « épargne logement » (PEL, CEL) ont des montants minimum et maximum qui dépendent de la durée. De plus, le taux du prêt résultant de la composition de plusieurs plans ou comptes épargne logement est fonction des taux et des montants d'emprunt sur chacun des plans ou comptes. Les prêts « à taux zéro » (PTZ, PPL) ne peuvent intégrer un plan de financement qu'à certaines conditions. Lorsqu'un PTZ comportent deux paliers, la durée du premier palier doit être inférieure à la durée du prêt complémentaire le plus long du plan de financement ; si ce n'est pas le cas, celle-ci doit être raccourcie, dans la limite de 72 mois. Un PPL ne peut appartenir au plan de financement que si la moitié du besoin total de financement est couvert par des prêts de plus de quinze ans.

À présent, voyons les contraintes et objectifs qu'un chargé de clientèle peut poser afin de construire la solution de financement la plus adapté à son client. Il y a deux façons de définir ce que l'on entend par « optimiser un plan de financement ». La première est la suivante : le client a une capacité maximum de remboursement (qui peut être variable au cours du temps) et l'on souhaite construire un plan de financement de coût minimum (c'est-à-dire qui minimise la somme des intérêts mensuels payés par le client) dont les mensualités sont inférieures à cette capacité maximum de remboursement. Nous insistons sur le fait que les mensualités de remboursement souhaitées par le client peuvent variées d'une année à l'autre, voire même d'un mois à l'autre, le but étant de proposer au client un plan de financement parfaitement adapté à l'évolution dans le temps de sa capacité de remboursement (à condition, bien sûr, que celle-ci soit connue). La seconde peut être formulée comme suit : le client souhaite que son remboursement s'étale sur une certaine durée. Le but est alors de trouver un plan de financement qui, ne dépassant pas cette durée, minimise le pic atteint par une échéance sur celle-ci (on cherche en quelque sorte à lisser les échéances payées par le client sur la durée du plan de financement). Ce mode d'optimisation, qui est le complémentaire du précédent, permet en outre de déterminer la capacité minimum de remboursement nécessaire à l'amortissement de l'emprunt du client sur la durée souhaitée.

Nous offrons également au chargé de clientèle la possibilité de forcer l'inclusion d'un prêt dans le plan de financement en fixant un montant minimum d'emprunt sur celui-ci. Cela permet notamment de proposer au client des plans de financement mêlant prêts à taux variables, moins coûteux, et prêts à taux fixes, plus sûrs. Un autre cas de figure où ce type de contraintes s'avère utile est le suivant : le client souhaite utiliser les droits qu'il a acquis sur son PEL, même si son taux d'emprunt est moins avantageux que ceux des prêts proposés par la banque. Enfin, notons que le chargé de clientèle peut définir manuellement certains prêts du plan de financement, ou encore y inclure diverses charges externes (prêts immobiliers déjà contractés, crédits consommation, *etc.*).

Pour terminer cette présentation, mentionnons la possibilité qu'a le chargé de clientèle d'associer à chaque prêt du plan de financement une ou plusieurs assurances. Celles-ci sont pour la plupart des assurances sur capital initial (CI), bien qu'apparaissent aujourd'hui des assurances sur capital restant dû (CRD). Dans le cas d'une assurance unique sur CI et de taux mensuel A, les équations (3) et (4) d'amortissement deviennent :

$$c_1 = e_1 - [T_d \times m] - [A \times m]$$

$$c_j = e_j - [T_d \times (m - \textstyle\sum_{k=1}^{j-1} c_k)] - [A \times m] \text{ pour tout } j = 2, \ldots, d$$

Dans le cas d'une assurance unique sur CRD et de taux mensuel A, nous avons les équations suivantes :

$$c_1 = e_1 - [(T_d + A) \times m]$$

$$c_j = e_j - [(T_d + A) \times (m - \textstyle\sum_{k=1}^{j-1} c_k)] \text{ pour tout } j = 2, \ldots, d$$

De plus, des contraintes supplémentaires doivent être posées empêchant que le taux effectif global de chaque prêt du plan de financement dépasse le taux d'usure fixé par la loi. De fait, la prise en compte des assurances (dont une au moins est généralement obligatoire) complexifie encore le problème et sa résolution, en particulier lorsque celles-ci sont sur capital initial. Mais avant d'aborder les difficultés liées à la résolution du problème, voici un aperçu de ce qu'est l'optimisation au sens mathématique du terme, et plus particulièrement la programmation mathématique.

3 Quelques notions d'optimisation et de programmation mathématique

Voici une définition que nous livre Minoux (1983) : « la programmation mathématique se propose pour objet l'étude théorique des problèmes d'optimisation ainsi que la conception et la mise en œuvre des algorithmes de résolution ». Un programme mathématique comporte une fonction, appelée objectif, qu'il faut minimiser ou maximiser sous certaines contraintes. Voici un petit programme mathématique :

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & 2.3 \cdot x_1 + 3.1 \cdot x_2 \\ \text{Sujet à} & x_1 + 5.2 \cdot x_2 \leq 80.6 \\ & 4.8 \cdot x_1 + x_2 \geq 73.4 \\ & 5.5 \leq x_1 \leq 22.5 \\ & 3.4 \leq x_2 \leq 12.4 \end{array}$$

Ce programme comporte deux variables x_1, x_2 et quatre contraintes ; les deux dernières contraintes du programme sont particulières, en ce sens qu'elles définissent les bornes des variables x_1 et x_2. Une solution optimale de ce programme, unique ici, est $(x_1 = 14.5833, x_2 = 3.4)$; la valeur de la fonction objectif correspondante, appelée coût de la solution optimale, est 44.0815. Nous remarquons que la fonction objectif de même que toutes les contraintes de ce programme s'expriment comme des inéquations linéaires : ce type de programme mathématique sera donc appelé programme linéaire. De nombreux problèmes d'optimisation se modélisent sous la forme de programmes linéaires où certaines variables ne prennent que des valeurs entières, voire booléennes (0,1). Par exemple, imaginons que les deux dernières contraintes du programme deviennent $x_1 \in \{6,\ldots,22\}$ et $x_2 \in \{4,\ldots,12\}$. Ce type de programme est alors appelé programme linéaire en nombres entiers, ou mixtes lorsque variables réelles et variables entières se côtoient. Enfin, le terme générique de programme non linéaire est employé pour désigner un programme où la fonction objectif ou les contraintes ne sont pas linéaires (bien que certains d'entre eux se singularisent : programmes quadratiques, programmes convexes).

Naturellement, certains programmes sont plus difficiles à résoudre que d'autres. Un des résultats forts de la discipline est l'existence d'algorithmes efficaces pour la résolution des programmes linéaires. Citons à ce propos l'algorithme du « simplexe », élaboré par G. Dantzig dès la fin des années 40, qui reste à ce jour l'algorithme le plus utilisé en programmation linéaire ; ce dernier est apprécié des praticiens tant pour son efficacité en temps de calcul que pour sa stabilité numérique. Notons tout de même qu'une nouvelle lignée d'algorithmes dits « de points intérieurs » est apparue au début des années 80, permettant la résolution efficace de grands programmes linéaires mais aussi de certains programmes non linéaires.

D'un autre côté, la théorie de la complexité (Garey et Johnson, 1979) nous a malheureusement appris que la résolution de programmes linéaires devient en général très difficile dès lors qu'apparaissent des variables entières ; en fait, l'aspect combinatoire d'un problème induit bien souvent une difficulté intrinsèque quant à sa résolution. Toutefois, des méthodes arborescentes combinant énumération et programmation linéaire (plus connus sous leur dénomination anglaise de *branch-and-bound*, *branch-and-cut* ou encore *branch-and-price*) permettent la résolution exacte de programmes linéaires en nombres entiers comportant plusieurs centaines, voire milliers, de variables et de contraintes en des temps raisonnables (de l'ordre de la minute). Au-delà du millier de variables, les temps de calcul exponentiels obligent à recourir à des heuristiques (généralement adaptées à la nature du problème) pour espérer trouver rapidement de bonnes solutions.

En conclusion, évoquons un ensemble de techniques issues du domaine de l'intelligence artificielle et regroupées sous le nom de programmation par contraintes, permettant une modélisation compacte ainsi qu'une résolution efficace des programmes fortement non linéaires de petite taille (le logiciel PROLOG IV, édité par EXPERIAN–PROLOGIA, en est un exemple). Pour plus de détails sur la programmation mathématique, ses fondements théoriques ainsi que les algorithmes de résolution, nous recommandons au lecteur la lecture de l'ouvrage de Minoux (1983).

4 Résolution du problème

Les principaux obstacles

La difficulté majeure est que le problème d'optimisation de plans de financement, même dans sa forme la plus réduite, est complètement combinatoire (contrairement aux problèmes généralement rencontrés dans le domaine de la finance). En effet, toutes les variables de décision du problème sont discrètes, exprimées en centimes lorsqu'il s'agit de montants et en mois lorsqu'il s'agit de durées. De plus, certaines contraintes liées aux prêts réglementés s'expriment de façon non linéaires. De fait, le problème devient très difficile à résoudre de manière exacte dès lors que quelques prêts sont susceptibles d'intégrer le plan de financement. À cela viennent s'ajouter deux difficultés opérationnelles. Le chargé de clientèle doit pouvoir présenter dans l'immédiat une ou plusieurs solutions au client, ce qui ne laisse qu'un temps de calcul très court à l'optimisation (moins d'une seconde). Ensuite, les plans de financement optimisés sont voués à être commercialisés en l'état, sans retouche de la part du chargé de clientèle ; par conséquent, aucune erreur numérique n'est tolérée, d'autant moins que les résultats doivent être compatibles avec ceux attendus par la chaîne de gestion des prêts.

Les actuaires de la banque en question ont développé il y a quelques années un outil qui permet l'assemblage d'un nombre limité de prêts possédant des caractéristiques précises, en procédant à une énumération orientée « métier » des solutions. Ici, la définition très générique du problème empêche toute tentative de résolution en temps réel par force brute. L'idée maîtresse sur laquelle repose notre schéma de résolution est la modélisation du problème sous la forme d'un programme linéaire mixte, qui bien que complexe, nous a permis de développer une heuristique à la fois efficace et robuste basé sur la programmation linéaire mixte pour résoudre le problème posé.

Modélisation par programme linéaire mixte

L'idée majeure est de relâcher la contrainte d'intégrité de toutes les variables associées à des montants (*i.e.*, exprimées en centimes), chose assez naturelle, et de représenter les durées par des ensembles de variables booléennes, ce qui l'est moins. Une remarque clé est qu'à durée fixée, le taux l'étant lui aussi, les équations liant échéances et montant deviennent linéaires une fois supprimées les règles d'arrondi. Après avoir expliqué comment est modélisé un prêt au sein du programme linéaire mixte, nous aborderons la définition de la fonction objectif et des contraintes additionnelles lorsque le but est de minimiser le coût du plan de financement pour le client. Afin d'éviter de trop lourds détails techniques, nous ne considérons ici que le cas d'un prêt standard hors assurance.

Nous commençons par la description d'un prêt à profil constant ; nous dériverons ensuite le modèle pour les prêts à profil libre. À chaque prêt est associé une variable booléenne $p \in \{0,1\}$ de manière à ce que $p = 1$

si le prêt est inclus dans le plan de financement, et $p = 0$ dans le cas contraire. La durée d du prêt est « éclatée » en autant de variables booléennes $d_{D_{\min}}, \ldots, d_{D_{\max}} \in \{0,1\}$ que ce qu'il y a de mois entre $D_{\min}$ et $D_{\max}$: la variable d_j prendra la valeur 1 si le prêt a une durée de j mois, et la valeur 0 sinon. Afin qu'une et une seule variable d_j ne soit égale à 1, et ce lorsque le prêt en question appartient à la solution de financement, nous posons la contrainte $d_{D_{\min}} + \cdots + d_{D_{\max}} = p$. À chaque variable d_j sont ensuite associées les variables réelles m_j et e_j correspondant respectivement au montant emprunté sur le prêt et à l'échéance mensuelle permettant le remboursement sur la durée j. Pour tout $j = D_{\min}, \ldots, D_{\max}$, nous posons alors les contraintes

$$
\begin{aligned}
& d_j \cdot M_{\min} \leq m_j \leq d_j \cdot M_{\max} \\
& m_j = e_j \cdot VAN(1, j, T_j)
\end{aligned}
$$

où l'expression $VAN(1, j, T_j) = \sum_{k=1}^{j} 1 \big/ (1 + T_j)^k$ correspond à la valeur actuelle d'un euro versé mensuellement sur une durée de j mois au taux T_j. Notons que ces deux dernières contraintes sont bien linéaires puisque $M_{\min}$, $M_{\max}$ et $VAN(1, j, T_j)$ sont des constantes. En outre, le lecteur vérifiera que lorsque la variable d_j associée à la durée j est active ($d_j = 1$), alors toutes les contraintes associées aux autres durées sont inactives ($m_{j'} = 0$ et $e_{j'} = 0$ pour toute durée $j' \neq j$).

Pour les prêts à profil libre, c'est-à-dire dont l'échéance est susceptible de varier chaque mois, le modèle se décline en introduisant les variables $c_{j,k}$ et $i_{j,k}$ correspondant respectivement à la part de l'emprunt remboursé au mois k et au montant des intérêts versés ce même mois, pour une durée de prêt de j mois. Seules les équations décrivant l'amortissement du capital changent pour devenir

$$
\begin{aligned}
& i_{j,1} = T_j \cdot m_j \\
& i_{j,k} = i_{j,k-1} - T_j \cdot c_{j,k-1} \text{ pour tout } k = 2, \ldots, j
\end{aligned}
$$

auxquelles il faut ajouter la contrainte $m_j = \sum_{k=1}^{j} c_{j,k}$ assurant le remboursement total de l'emprunt ainsi que les contraintes d'amortissement mensuel minimum $c_{j,1}, \ldots, c_{j,j} \geq d_j \cdot C_{\min}$.

Lorsqu'un plan de financement de coût minimum est recherché, la fonction objectif se définit comme minimiser la somme des termes $j \cdot e_j - m_j$ pour tout $j = D_{\min}, \ldots, D_{\max}$ dans le cas d'un prêt à profil constant et des termes $\sum_{k=1}^{j} i_{j,k}$ pour tout $j = D_{\min}, \ldots, D_{\max}$ dans le cas d'un prêt à profil libre. Le programme est complet une fois ajoutées les contraintes assurant le non dépassement de la capacité mensuelle de remboursement du client : pour chaque mois k, la somme des variables e_j ou des termes $i_{j,k} + c_{j,k}$ tels que $k \le j$ doit être inférieure ou égale à la capacité de remboursement ce même mois. En fait, lorsque le but est de lisser les échéances du plan sur la durée souhaitée par le client, seules la fonction objectif et ces contraintes additionnelles changent.

Les grandes lignes de l'heuristique

L'idée générale est de construire de façon itérative, en quelques étapes rapidement exécutées, un plan de financement admissible (ou presque puisque l'on s'autorise à dépasser légèrement la mensualité souhaitée par le client dans certains cas à la limite), viable du point de vue commercial, et proche d'un plan optimal en terme de coût.

La résolution s'opère en trois phases. Tout d'abord, lorsque cela est possible, une première solution admissible est rapidement calculée à l'aide d'un seul prêt de façon à obtenir une borne supérieure du coût de la solution optimale. Ensuite, une solution non admissible, mais dont le profil est très proche de celui de la solution optimale, est calculée par programmation linéaire mixte à l'aide du modèle présenté précédemment. Afin de permettre une résolution en temps réel, cette seconde étape est effectuée en deux temps : un premier programme est résolu dans lequel les contraintes les plus complexes (parce que non linéaires ou bien introduisant une trop forte combinatoire) sont approximées par des contraintes linéaires, voire omises, puis un second programme est résolu dans lequel de nombreuses variables sont fixées et les contraintes complexes réintégrées. La résolution des programmes linéaires mixtes se fait par un algorithme classique de *branch-and-bound* à l'aide du solveur GLPK (Makhorin 2004). Enfin, la solution obtenue est retouchée à l'aide d'une heuristique de manière à respecter les règles d'arrondi et être plus esthétique d'un point de vue marketing et commercial. Ce dernier point est dû au fait que les solutions retournées par le module d'optimisation sont parfois difficiles à appréhender pour les chargés de clientèle qui n'ont généralement qu'une formation scientifique de base, et donc à expliquer à leurs clients.

En fait, le premier programme linéaire mixte qui est résolu rassemble les contraintes maîtresses du problème; c'est pourquoi une solution de ce programme fournit une excellente approximation de la solution optimale globale. La difficulté est ensuite de construire une solution admissible s'appuyant sur le profil de cette première solution. Celle-ci fournit également une borne inférieure en terme de coût permettant d'apprécier la qualité de la solution finale. Ainsi, nous avons pu vérifier que le coût de la solution présentée au client se situe au pire à quelques dizaines d'euros d'une solution optimale.

Ce schéma de résolution nous permet donc d'obtenir en temps réel des plans de financement quasi optimaux, que des experts ne pourraient calculer manuellement. Les solutions obtenues, parfois surprenantes, font apparaître des gains significatifs en faveur du client par rapport à une solution « naïve » (par exemple ne comportant qu'un seul prêt). Ce travail a d'ailleurs permis un certain retour d'expérience, en démontrant que certaines pratiques développées au sein de la banque pour la construction de plans de financement conduisaient ou non à de bonnes solutions (il est à noter que la mise en place du nouvel outil d'optimisation a nécessité un effort important de formation des chargés de clientèle dans la banque). Voici quelques exemples de plans de financement calculés par notre module d'optimisation et visualisés à l'aide de notre outil de simulation graphique.

Quelques exemples

La Figure 1 ci-dessous montre l'assemblage d'un prêt A à taux fixe et un prêt B à taux révisable pour un emprunt de 100000 euros et une mensualité souhaitée de 800 euros. L'objectif est de minimiser le coût du plan de financement, tout en imposant un emprunt d'au moins 30 % du besoin de financement sur le prêt à taux fixe. Le prêt A possède la grille de taux suivante : 3.55 % sur 84 mois, 3.70 % sur 120 mois, 3.80 % sur 144 mois, 3.90 % sur 180 mois ; le prêt B, à taux révisable, possède une grille de taux plus avantageuse : 3.05 % sur 84 mois, 3.20 % sur 120 mois, 3.30 % sur 120 mois et 3.40 % sur 180 mois. Le lecteur notera que le profil de la solution obtenue, bien que ne comportant que deux prêts, n'est pas intuitif. Il s'avère pourtant être le profil typique que l'on obtient lorsque l'on optimise un plan composé de prêts à profil libre standards.

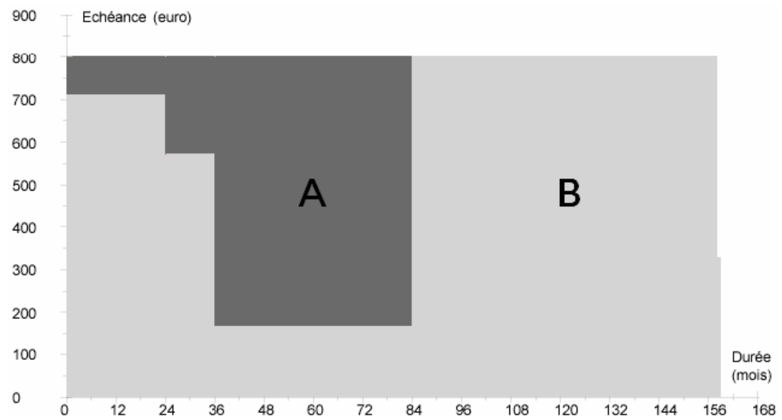

Figure 1

De 0 à 24 mois, les échéances du prêt A correspondent exactement au montant des intérêts (plus un euro d'amortissement minimum) pendant que le prêt B est amorti, puis de 24 à 36 mois, un basculement s'opère entraînant une « inversion des rôles », de 36 à 84 mois, le prêt A est amorti et le prêt B voient ses échéances réduites au remboursement des intérêts (plus un euro obligatoire). En fait, la façon dont se combinent les prêts à profil libre respecte certaines propriétés combinatoires : quelque soit leurs taux, les variations de leurs échéances ne sont jamais chaotiques dès lors que ces taux ne sont pas égaux (et ce même si l'écart n'est que d'un millionième de %). Ces variations se produisent en des points bien déterminés de l'axe du temps. Nous n'avons pas encore réussi à démontrer formellement cette propriété, qui a été vérifiée expérimentalement ; la preuve semble complexe et mérite une étude approfondie.

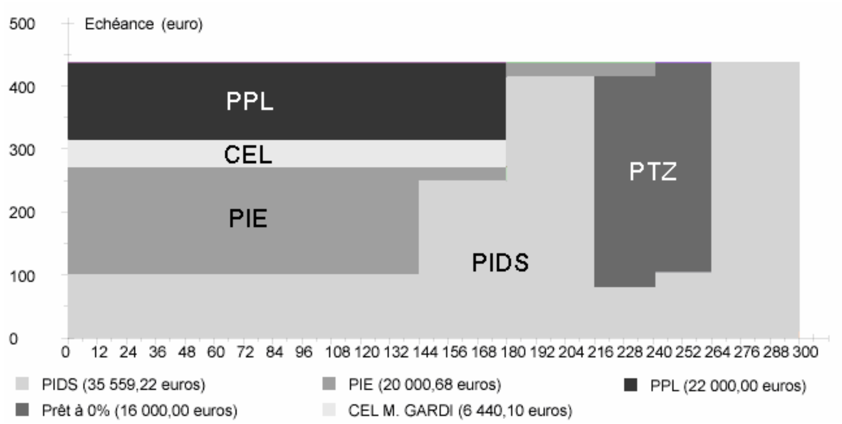

Figure 2

La Figure 2 représente un plan de financement beaucoup plus complexe correspondant à un emprunt de 100000 euros, où l'objectif est de lisser au mieux l'échéance sur 25 ans. De plus, le client demande à ce qu'un minimum de 20 % du besoin de financement soit emprunté sur un prêt à taux fixe, appelé ici PIE. L'échéance obtenue après optimisation est donc la plus basse possible au vu des contraintes posées et des caractéristiques des prêts pouvant appartenir au plan de financement. La difficulté est ici de parvenir à composer un plan de financement optimal à l'aide des trois prêts règlementés (CEL, PTZ, PPL).

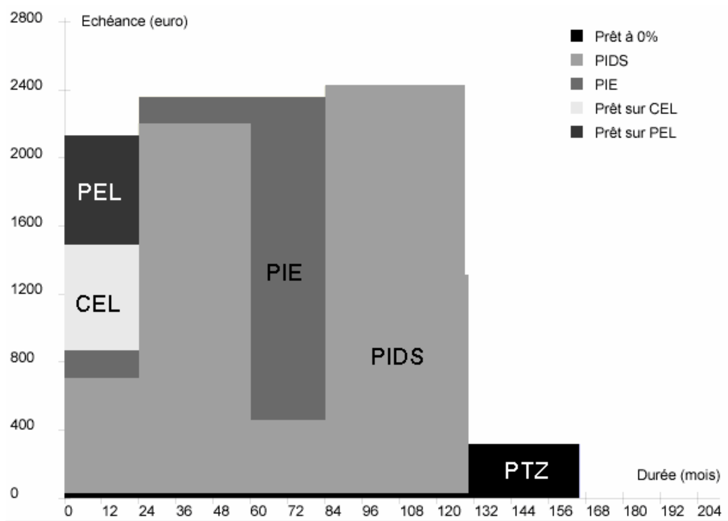

Figure 3

La Figure 3 est un exemple de plan de financement où une augmentation de la capacité de remboursement du client est simulée (2100 euros entre 0 et 24 mois, 2300 euros entre 24 et 84 mois et 2400 euros à partir de 84 mois). Dans cet exemple, la durée du premier palier du PTZ est raccourcie de façon à rester inférieure ou égale à la durée du prêt complémentaire le plus long de la solution, comme la réglementation l'exige.

5 Conclusion et perspectives

Deux pistes de travail sont aujourd'hui envisagées afin d'affiner et enrichir le modèle sur lequel les plans de financement sont optimisés, le but étant d'obtenir un modèle correspondant au plus près aux attentes de la banque, et par la même, de son client.

Tout d'abord, il semble opportun d'intégrer les coûts des garanties que le client doit supporter ainsi que les différents frais liés à l'opération (en particulier, les frais de dossier). En effet, certains plans de financement calculés aujourd'hui s'avèrent ne plus être optimaux lorsque y sont ajoutés les coûts liés aux garanties et aux frais de dossier. L'intégration dans le modèle de ces coûts, qui ne varient pas linéairement en fonction du capital emprunté, permettrait une optimisation globale des plans de financement immobilier. Ensuite, la question du refinancement de la banque, et donc de ses profits, se pose face au besoin de fidéliser un client. Il semble judicieux d'intégrer au modèle les contraintes et objectifs de la banque, de façon à réaliser une optimisation dite bi-objectif. En effet, des solutions pourraient être trouvées qui satisfassent à la fois le client et la banque. Par exemple, l'objectif d'un client présentant des risques pourrait être atténué par rapport à celui de la banque, à condition que ceux-ci soient quantifiables économiquement (par exemple au travers de scores). Cette réflexion nous amène alors à une nouvelle question : ne pourrait-on pas envisager un modèle tenant compte de certains aspects probabilistes du problème, comme par exemple la probabilité de non remboursement d'un client, ou encore la probabilité qu'un client a de contracter d'autres produits financiers au sein de la banque ?

L'extension du présent modèle, en particulier en vue d'une intégration des contraintes et objectifs de la banque, n'est toutefois envisageable qu'à deux conditions : un profond travail de modélisation en concertation avec les actuaires de la banque (la recherche de solutions dites optimales n'aura de sens que si la modélisation mathématique du problème réel est suffisamment fine et pertinente), et en parallèle, un travail d'adaptation et d'amélioration du schéma actuel de résolution (afin notamment de conserver l'aspect temps réel). Mais après tout, compte tenu de la masse des demandes de crédits immobiliers que traitent chaque année les grandes banques françaises, le jeu n'en vaut-il pas la chandelle ?

Références

P. BONNEAU et M. WISZNIAK (1992). *Mathématiques financières approfondies*. Dunod, Paris, France. (5ème édition)

J. CARLIER (1984). Ordonnancement des paiements de dettes. *RAIRO Operations Research/Recherche Opérationnelle* 18(1), pp. 43-57.

M. CRAMER et J.-P. PONSSARD (1977). Ordonnancement des mouvements de trésorerie. *RAIRO Operations Research/Recherche Opérationnelle* 11(4), pp. 393-404.

M.R. GAREY et D.S. JONHSON (1979). *Computer and intractability : a guide to the theory of NP-completeness*. W.H. Freeman & Co., San Francisco.

M. GIRARD (1992). *Pratique des mathématiques financières*. Collection Institut Technique de Banque, Economica, Paris.

M. MINOUX (1983). *Programmation mathématique : théorie et algorithmes*. Collection Technique et Scientifique des Télécommunication, Dunod, Paris. (2 volumes)

A. MAKHORIN (2004). Librairie GLPK (GNU Linear Programming Kit, version 4.8).
`http://www.gnu.org/software/glpk/`

S.A. ZENIOS (1993). *Financial optimization* (sous la direction de S.A. Zenios). Cambridge University Press, Cambridge.