Optimisation de plans de financement immobiliers

~

Frédéric GARDI

03/07/2007

Bouygues SA / DGITN / e-lab

Présentation du problème

Plan/solution de financement :

$\approx$ assemblage/mix de produits

Pour chaque prêt du plan : son montant, sa durée et ses échéances (assurances, garanties et frais compris).

Plan valide/admissible : respecte les contraintes de prêts + les contraintes de plan.

Problème d'optimisation :

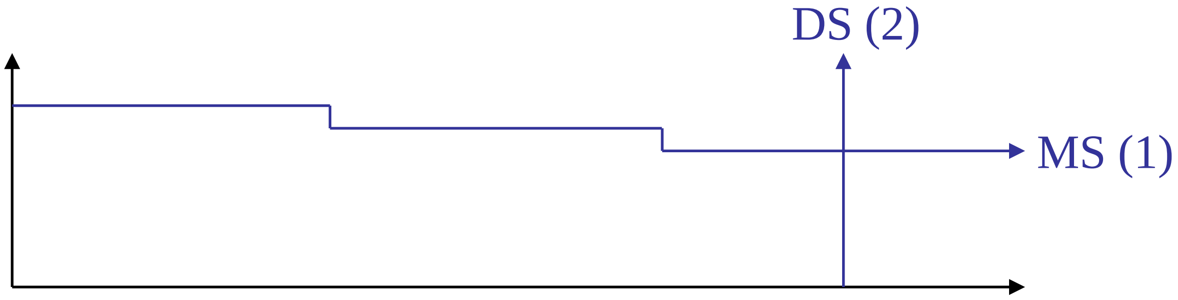
Parmi les produits mis à disposition du client, déterminer le « meilleur » plan de financement.

Présentation du problème

Deux objectifs possibles :

1) Notre client a une certaine capacité de remboursement et cherche un plan de financement de coût minimum, c'est-à-dire minimisant la somme des échéances du plan.

2) Notre client souhaite étaler ses remboursements sur une certaine durée : on cherche un plan de financement dont l'échéance maximale est minimum, c'est-à-dire « lisser » les échéances sur la durée.



Résolution

Difficultés :

- mathématique : variables discrètes (durées) introduisant un aspect combinatoire difficile + non linéarité de certaines contraintes (règlementaires)

- technique/opérationnelle :
    - résolution en temps réel (qq. secondes)
    - aucune erreur numérique n'est tolérée (robustesse)
    - généricité voulue dans la modélisation/résolution

Résolution

Idées :

- état de l'art sur le sujet : nul
- existant : outil d'assemblage développé par les actuaires SG (énumération orientée métier des solutions)

Mon approche : programmation linéaire mixte (PLNE)

Pourquoi ? Si l'on gratte un peu, on découvre :

- de bonnes propriétés structurelles
- un nombre limité de variables booléennes
- une importante partie linéaire

Résolution

<u>Schéma de résolution (heuristique) :</u>

1) Traitements préliminaires : calcul de bornes
2) Calcul du profil d'un plan optimal par PLNE
3) À partir de ce profil, calcul d'un plan commercialisable

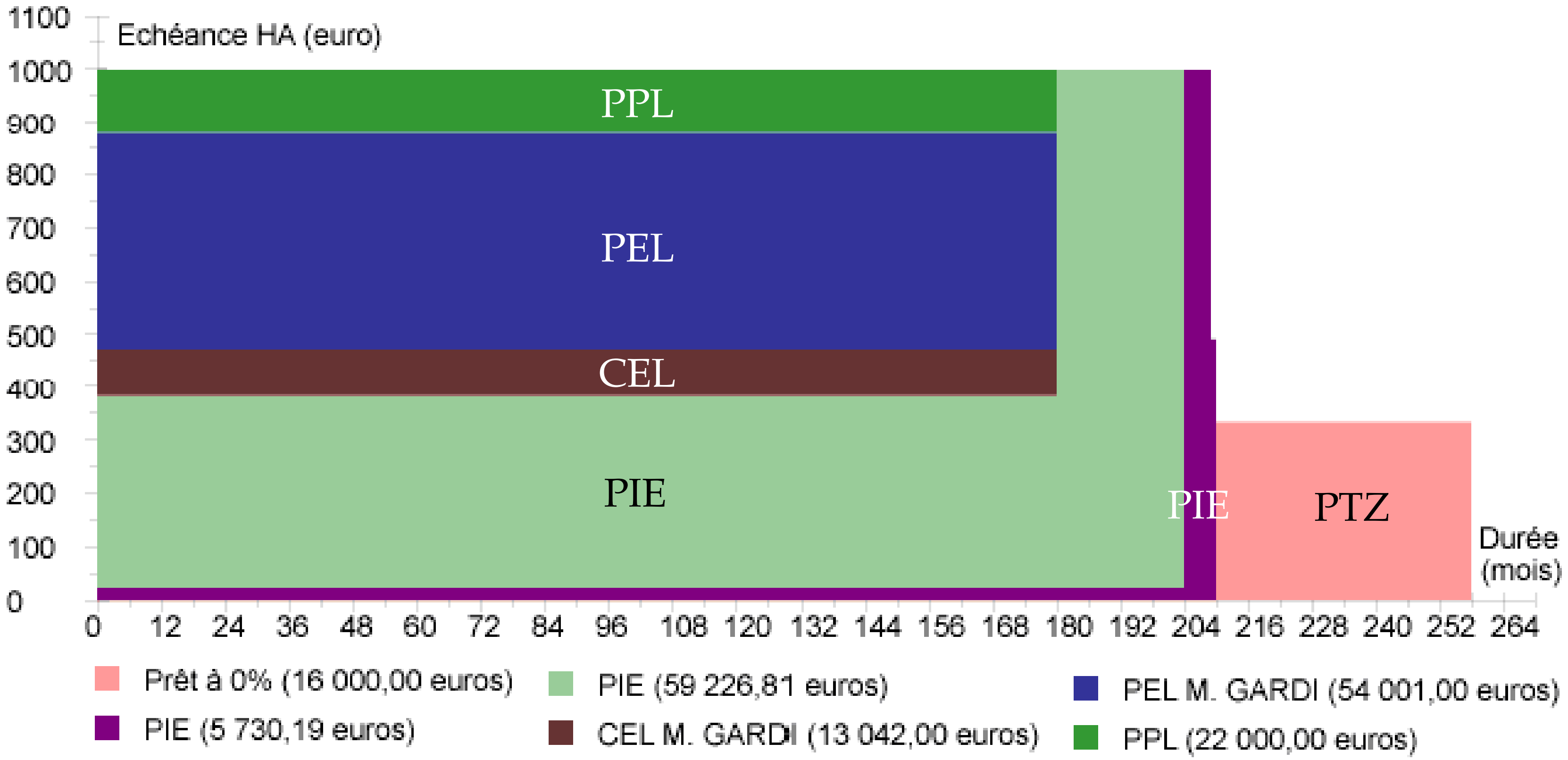
→ résolution quasi exacte du problème en temps réel

<u>Résultats :</u>

- gains significatifs (plusieurs % sur solution naïve)
- solutions optimales inattendues
- retours d'expérience :
  - sur les pratiques des experts métier
  - sur les produits construits par le marketing

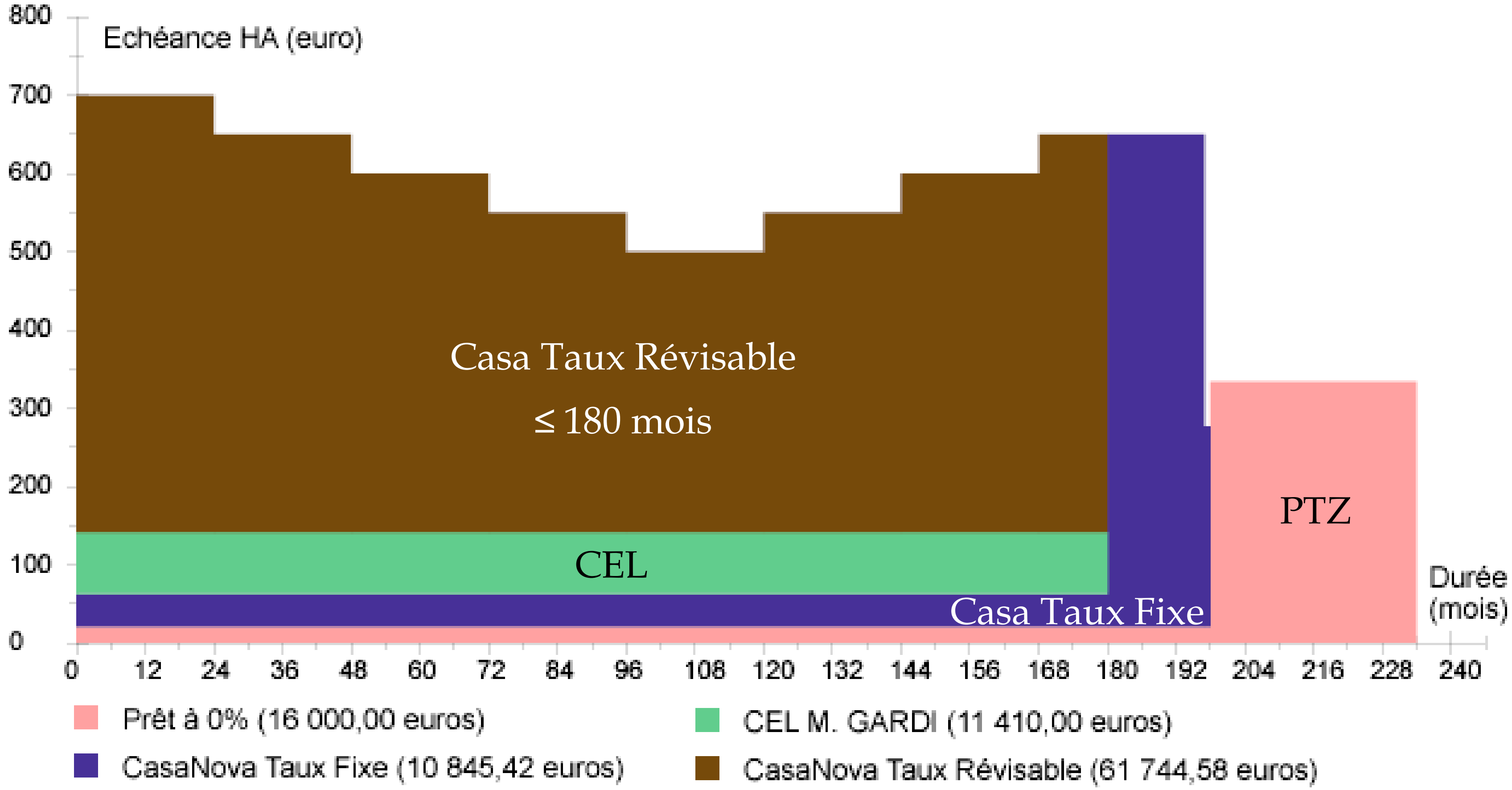
Cas pratiques

BF : 170 000 €   MS : 1 000 €



Cas pratiques

BF : 100 000 €   MS : 700 € → 500 € → 650 €



Prêts du secteur libre

Caractéristiques générales :

- montants minimum/maximum M_{min} , M_{max}
- durées minimum/maximum D_{min} , D_{max}
- montant minimum d'amortissement mensuel C_{min}
- grille de taux (strictement) croissante T_d
- profil : constant ou libre

Profil constant (classique) → rigidité

Profil libre (à paliers) → souplesse → optimisation

Beaucoup d'outils de simulation (voire de SI) encore limités aux prêts à profil constant.

Prêts du secteur libre

Profil constant :

Formule analytique liant montant, durée, échéance, taux :

$$m = e \cdot \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{(1+T_d)^j} = e \cdot \frac{(1+T_d)^d - 1}{T_d (1+T_d)^d} = e \cdot \mathrm{VAN}(1, d, T_d)$$

$$\mathrm{VAN}(d, f, t) = \sum_{j=d}^{f} \frac{1}{(1+t)^j}$$

Remarque à la base du modèle linéaire mixte :

durée fixée → taux fixé → équation linéaire

Prêts du secteur libre

Observation :

Un plan de financement composé que de prêts à profil constant ne peut saturer qu'une capacité de remboursement décroissante.

Proposition (difficulté) :

Déterminer un plan de financement à base de prêts à profil constant est un problème NP-complet, même si la capacité de remboursement est constante.

Propriétés intéressantes sans contrainte de montant et échéance de remboursement constante $\rightarrow$ caractérisation de la structure d'un plan optimal.

Prêts du secteur libre

Modélisation :

Variables de durées éclatées en booléens :

$$d_{D_{\min}} + \cdots + d_{D_{\max}} = p$$

Pour chaque durée j :

$$d_j \cdot M_{D_{\min}} \leq m_j \leq d_j \cdot M_{D_{\max}}$$

$$m_j = e_j \cdot \mathrm{VAN}(1, j, T_j)$$

$$e_j \geq T_j \cdot m_j + \mathrm{C}_{\min} \cdot d_j$$

Efficacité pratique : filtrage des durées + coupes de dominance

Prêts du secteur libre

Profil libre :

Formule analytique étendue à r paliers $(e_{j,}a_j, b_j)$:

$$m = \sum_{j=1}^{r} e_j \cdot \mathrm{VAN}(a_j, b_j, T_d)$$

Observation :

Soit un plan optimal composé d'un prêt à profil libre P de durée $d \geq D_{min}$:

(a) si le plan sature la capacité de remboursement en $j < d$, alors il la sature du premier mois jusqu'au mois j ;

(b) si le plan sature la capacité de remboursement en D_{min}, alors il la sature du premier mois jusqu'au mois $d - 1$.

Prêts du secteur libre

Assertion: prêts sans contrainte de montant.

Soit d^*_P la durée du plan optimal composé uniquement du prêt P.

Proposition (borne supérieure) :

Unique lorsque le plan existe, la durée d^*_P peut être calculée en temps $O(D_{max} \log G)$.

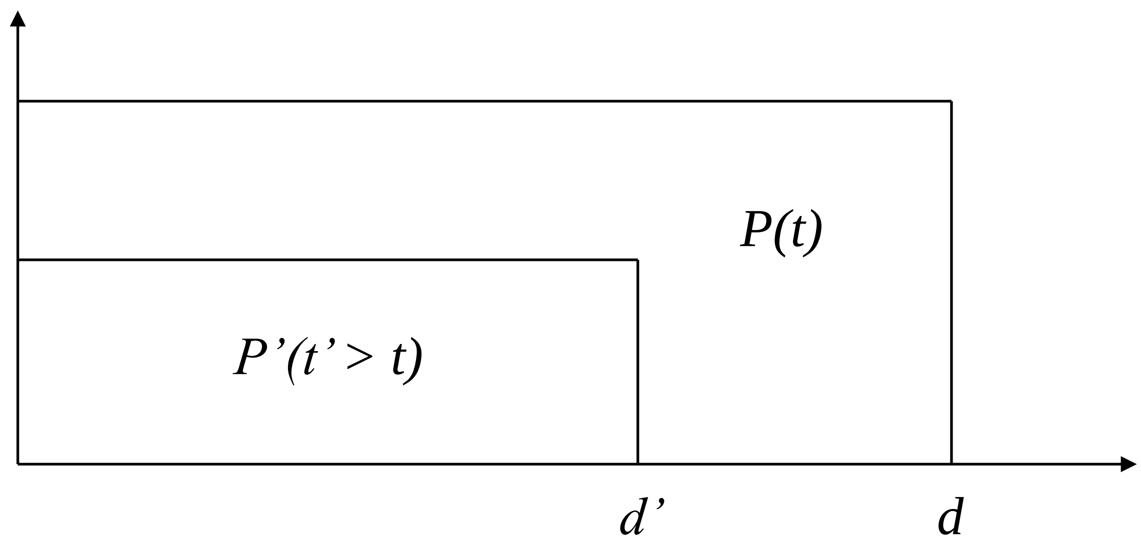
Proposition (borne supérieure) :

Soit d^* la plus petite des durées d^*_P. Tout plan optimal (et donc tout prêt qui le compose) a une durée inférieure à d^*, qui peut être calculée en temps $O(n\, D_{max} \log G)$.

Prêts du secteur libre

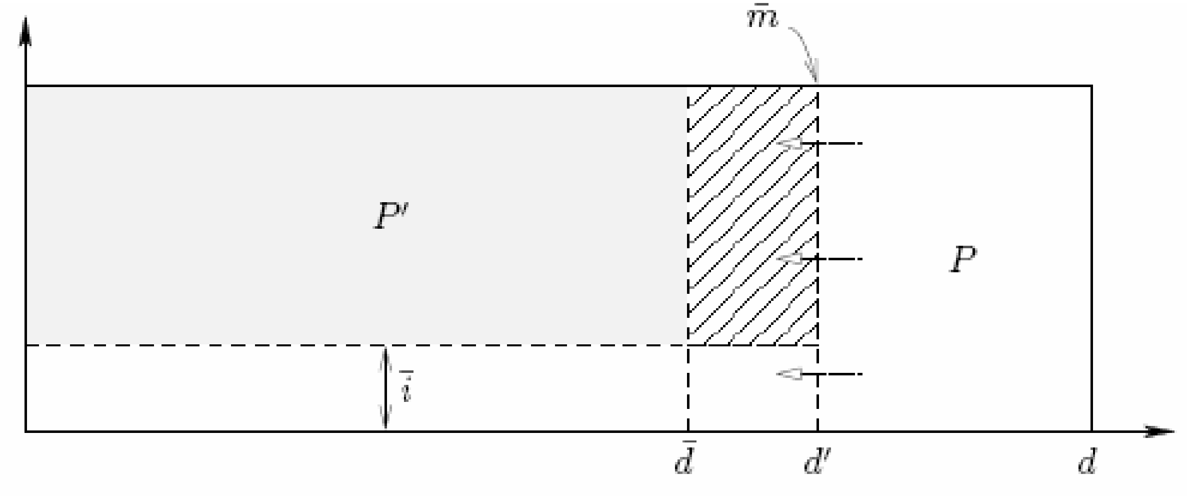
Lemme (dominance) :

Si un prêt P à taux t appartient à un plan optimal et a comme date de fin d, alors ce dernier ne peut contenir un prêt P' à profil libre (ou constant) de taux $t' > t$, ayant comme date de fin $d' < d$.



Prêts du secteur libre

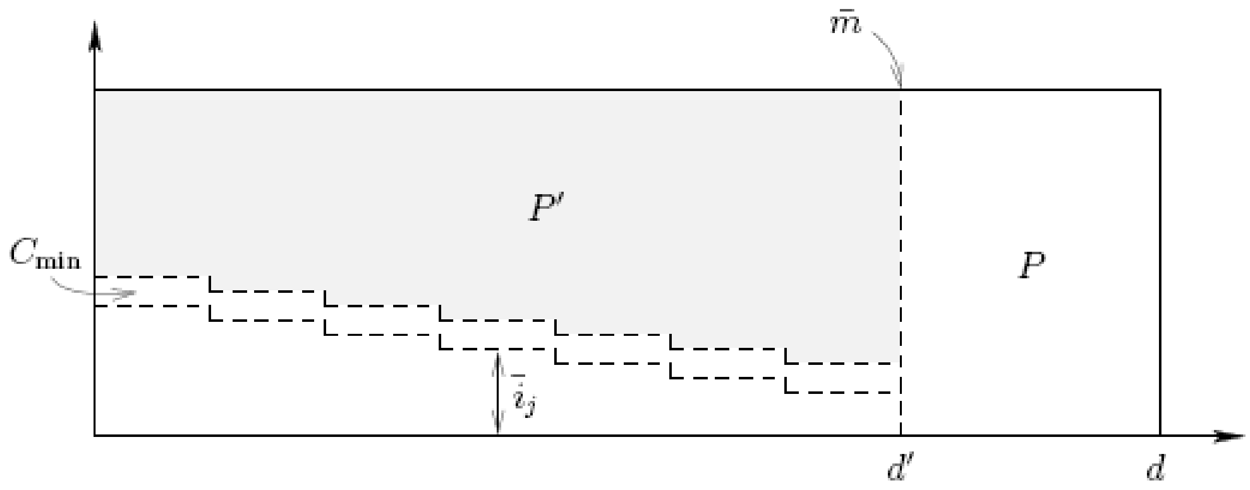
Emboîtement optimal de 2 prêts : $C_{min} = 0$



$$m' = \frac{\sum_{j=1}^{r'} (e_j - t \cdot m) \cdot \mathrm{VAN}(a_j, b_j, t')}{1 - t \cdot \mathrm{VAN}(1, d', t')}$$

Prêts du secteur libre

Emboîtement optimal de 2 prêts : $C_{min} > 0$



Remarque gênante : théoriquement, le prêt *P'* comporte *d'* paliers (autant de paliers que de mois).

Prêts du secteur libre

Proposition (caractérisation du plan optimal) :

Tout plan optimal composé de prêts à profil libre sans contrainte de montant satisfait :

(a) l'ordre induit par les taux des prêts du plan est le même que l'ordre induit par les durées des prêts ;

(b) hormis la durée du prêt le plus long, les durées des prêts coïncident avec les dates de variation de taux dans la grille.

De plus, si les plages de durées et de taux d'emprunt sont données pour chaque prêt, alors un plan optimal peut être calculé en temps $O(n\, D_{max})$.

Prêts du secteur libre

Modélisation :

Toujours variables de durées éclatées en booléens.

Pour chaque durée j et chaque palier k :

$$crd_{j,k} = crd_{j,k-1} - \alpha(D_{j,k}, T_j) \cdot (e_{j,k} - T_j \cdot crd_{j,k-1})$$

$$\alpha(d,t) = \sum_{r=0}^{d-1} (1+t)^r = \frac{(1+t)^d - 1}{t}$$

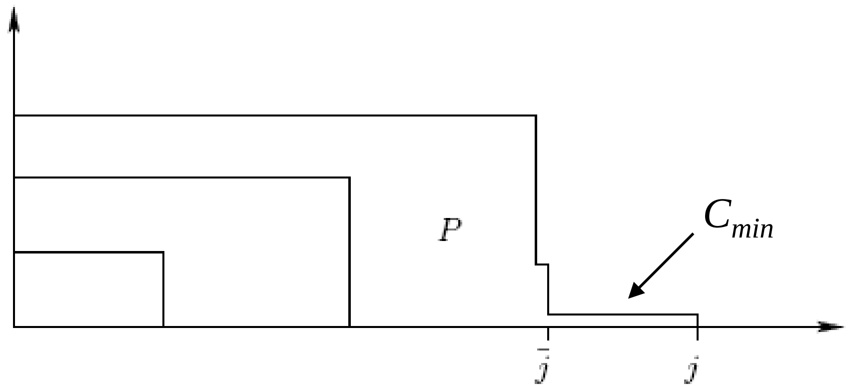
$$e_{j,k} \geq T_j \cdot crd_{j,k-1} + \mathrm{C}_{\min} \cdot d_j$$

Efficacité pratique : filtrage durées/paliers + coupes dominance

Prêts du secteur libre

Inconvénients :

Présence d'un amortissement résiduel sur le prêt le plus long, gommé dans la 3ème phase de l'heuristique :



Paliers résiduels éliminés par minimisation de leur nombre :

$$p_{j,k} \geq (e_{j,k-1} - e_{j,k}) / E_{\max}$$

$$p_{j,k} \geq (e_{j,k} - e_{j,k-1}) / E_{\max}$$

Prêts règlementés

<u>6 types de prêts :</u>

- PC, PAS : prêts conventionnées
- PEL, CEL : prêts épargne logement
- PPL, PTZ : prêts à taux zéro

Modélisation générique inutile et vaine.

<u>PC, PAS :</u>

- prêts à profil libre (avec grille de taux bonifié)
- exclusion mutuelle avec certains produits

$\rightarrow$ modèle identique aux prêts à profil libre

Prêts règlementés

<u>PEL, CEL :</u>

- phase épargne + phase emprunt : intérêts dus = intérêts acquis
- montant maximum fonction de la durée car taux fixé
- complexité lorsque plusieurs emprunteurs (ex : M. et Mme) : agrégation des prêts en un seul (héritage de vieilles pratiques !)
- durée en année pleine

$\rightarrow$ similaire aux prêts constants avec taux moyen approximé

<u>PPL :</u>

- 50% du BF sur prêts de + de 15 ans (à sauter le 01/11/2006)

$\rightarrow$ intégrer dans PLNE

Prêts règlementés

PTZ :

- 3 plafonds pour le montant dont un variable : BF' / 3 – la somme des montants des prêts inférieurs à 2 ans

$\longrightarrow$ intégrer dans le PLNE

- PTZ sur 2 paliers : durée premier palier PTZ ≤ durée prêt le plus long ; sinon raccourcir premier palier PTZ (dans limite de 6 ans)
- vision métier : le PTZ doit être « collé » en fin de SDF

$\longrightarrow$ efficacité pratique en 2 passes :

- calcul SDF avec PTZ règlementaire (borne d_{inf})
- si PTZ violée, alors calcul intégrer dans PLNE

Prêts règlementés

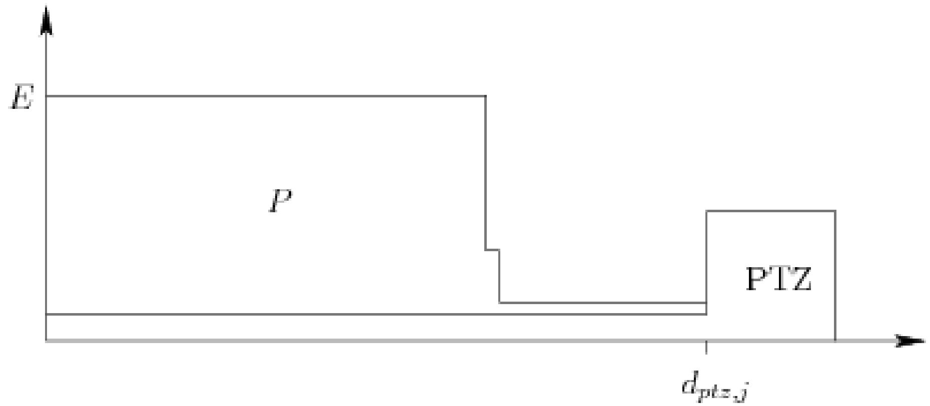


FIG. 11. PTZ + prêt à profil libre : plan optimal.

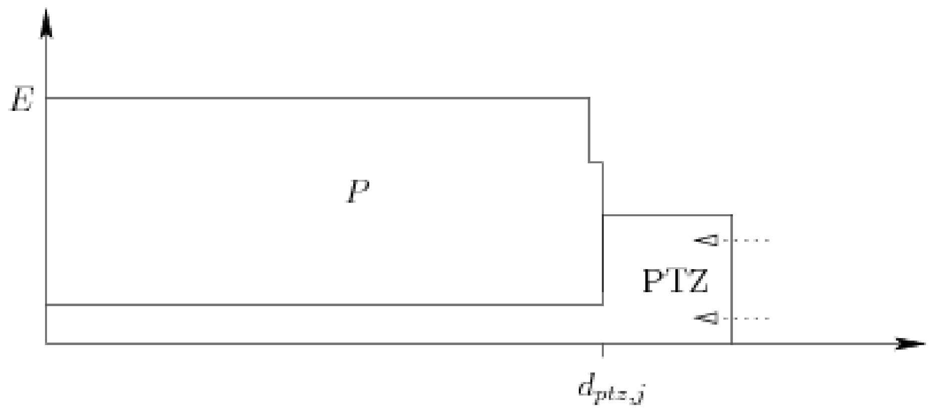


FIG. 12. PTZ + prêt à profil libre : plan idéal.

Prêts règlementés

PTZ :

- 3 plafonds pour le montant dont un variable : BF' / 3 – la somme des montants des prêts inférieurs à 2 ans

$\longrightarrow$ intégrer dans le PLNE

- PTZ sur 2 paliers : durée premier palier PTZ ≤ durée prêt le plus long ; sinon raccourcir premier palier PTZ (dans limite de 6 ans)
- vision métier : le PTZ doit être « collé » en fin de SDF

$\longrightarrow$ efficacité pratique en 2 passes :

- calcul SDF avec PTZ règlementaire (borne d_{inf})
- si PTZ violée, alors calcul intégrer dans PLNE

Assurances

Assurance sur capital initial (CRD) :

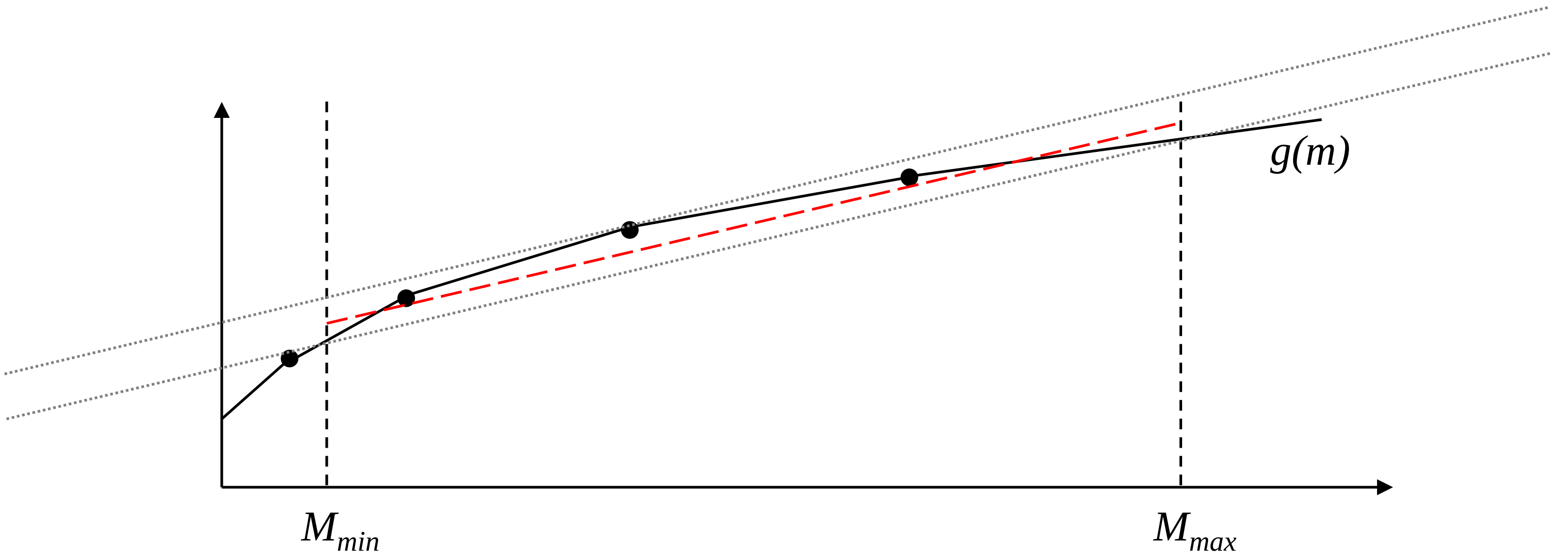
- travailler avec taux prêt + taux assurance
- propriétés conservées

Assurance sur capital initial (CI) :

- ajout de variables dans PLNE
- présence d'un résidu en fin de prêt (lien avec durée)
- propriétés moins évidentes, assumées vraies en pratique
- surprimes spéciales (gros BF) non gérées car rares et tordues

Garanties et frais

Bonne approximation linéaire de la fonction *g(m)* :



$g^*(m)$ en rouge minimise l'erreur dans $[M_{min}, M_{max}]$

Cas pratiques

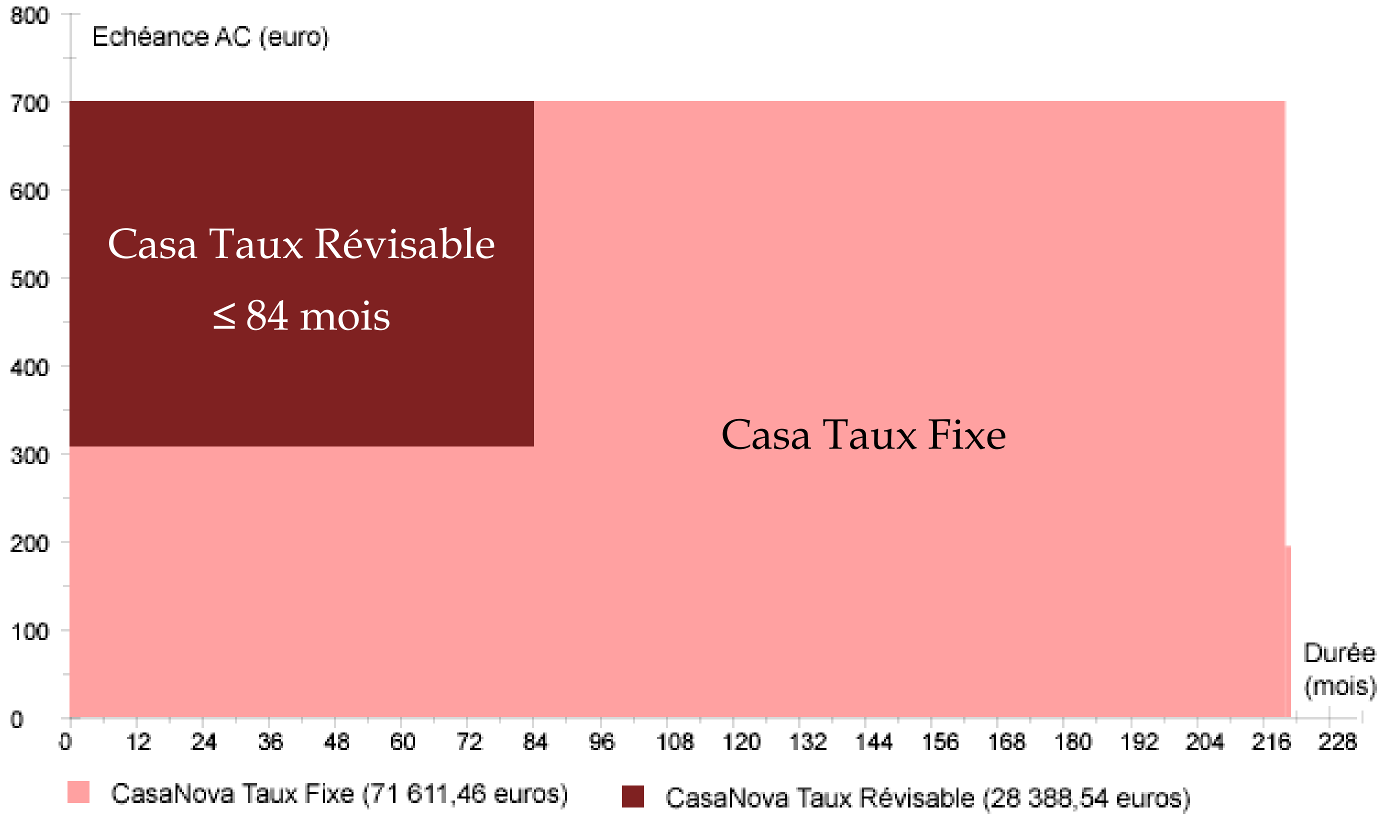
SDF n° 1 : BF : 100 000 € MS : 700 €

coût : 58 712 € 226 mois

Cas pratiques

SDF n° 2 : BF : 100 000 € MS : 700 €

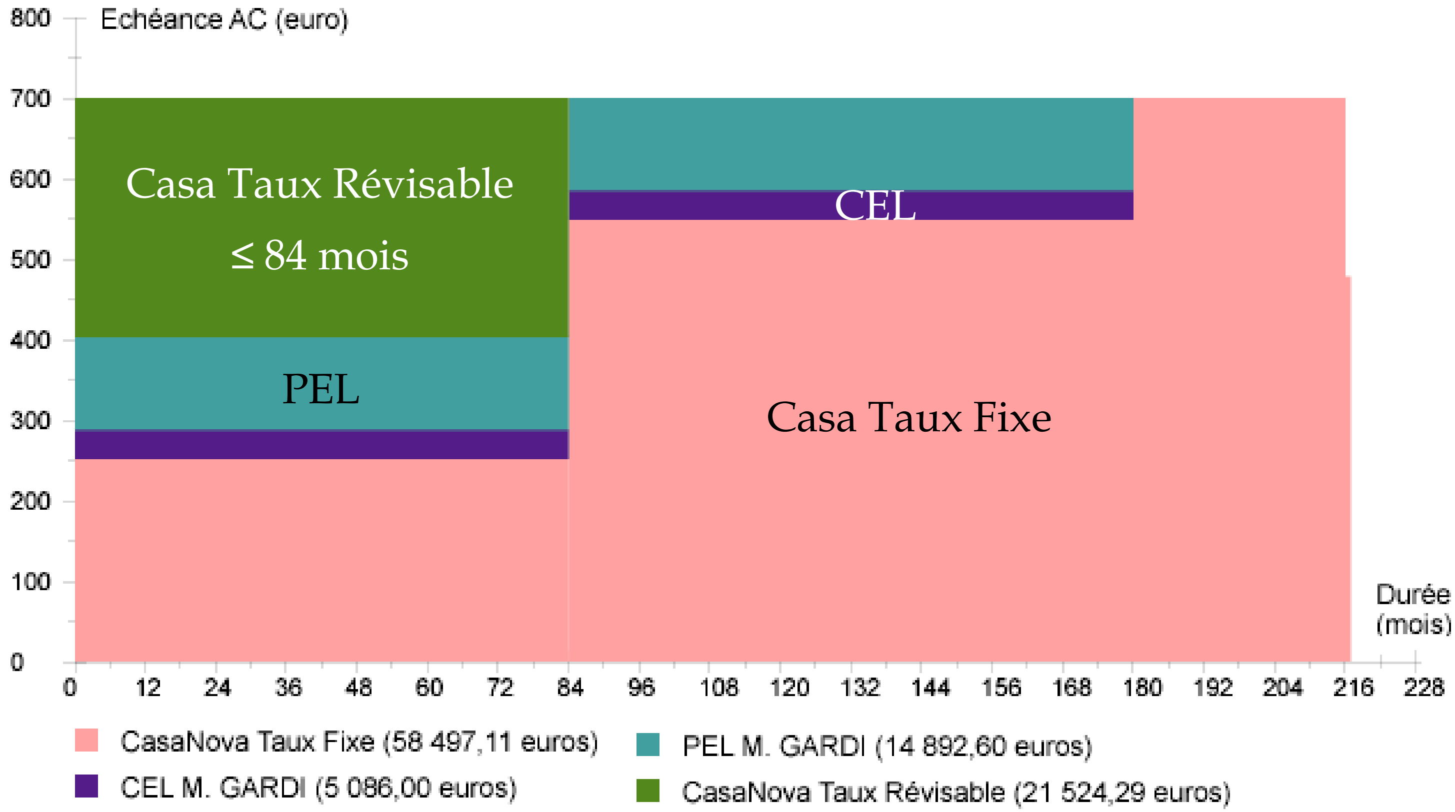
coût : 55 095 € 221 mois gain : 6,1 %



Cas pratiques

<u>SDF n° 3 :</u> BF : 100 000 € MS : 700 €

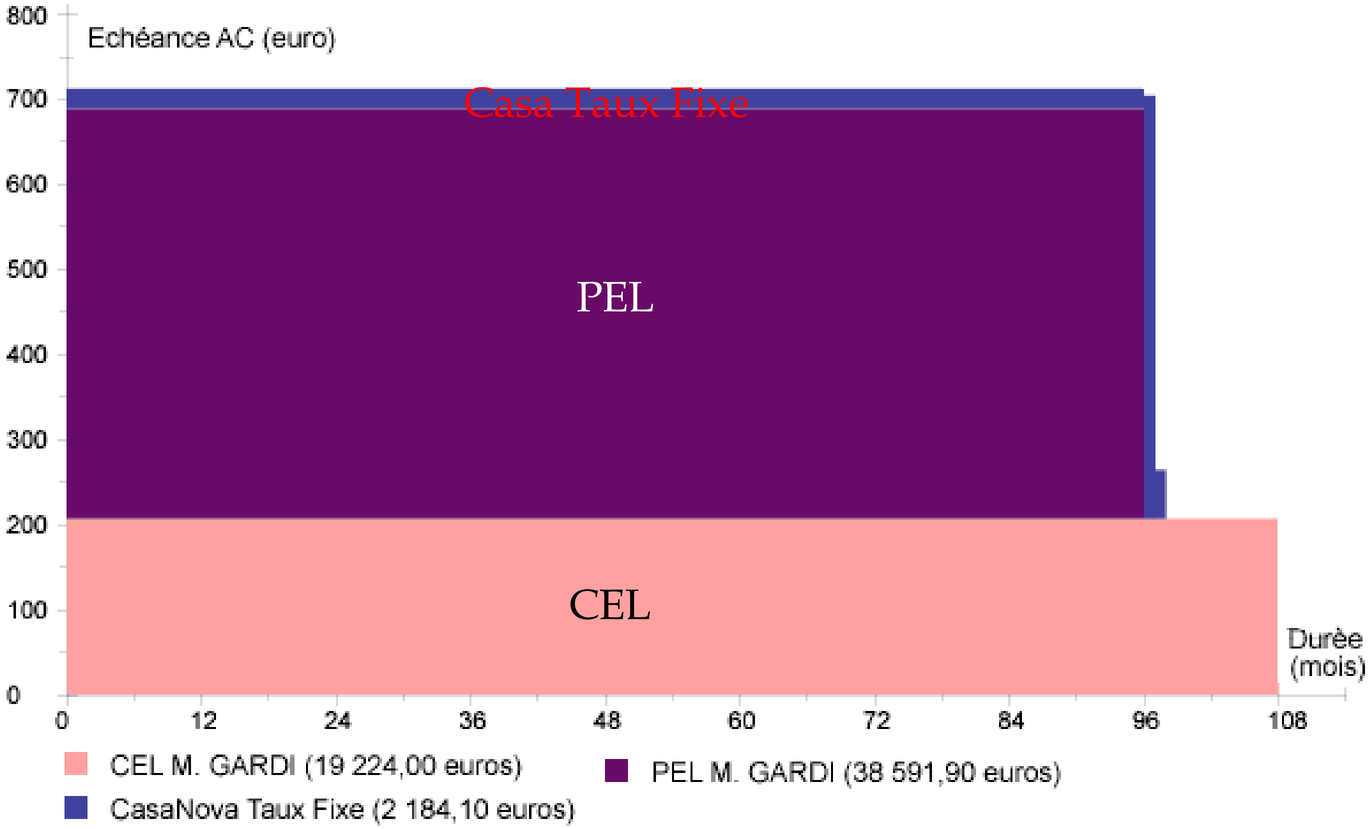
coût : 52 578 € 217 mois gain : 10,4 %



Cas pratiques

SDF n° 1 : BF : 60 000 € MS : 710 €

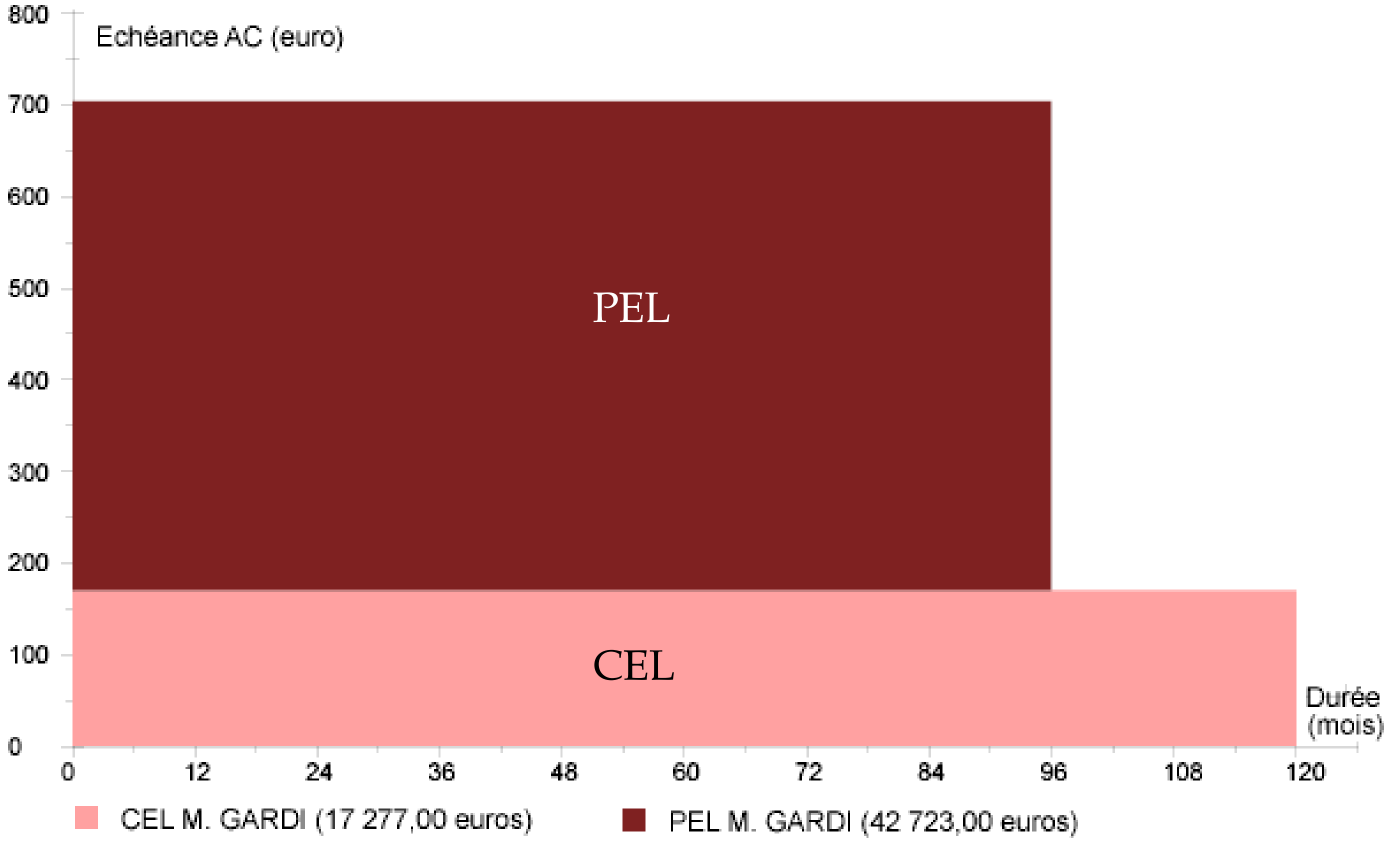
coût : 10 177 € + 3 067 € = 13 244 €



Cas pratiques

SDF n° 2 : BF : 60 000 € MS : 710 €

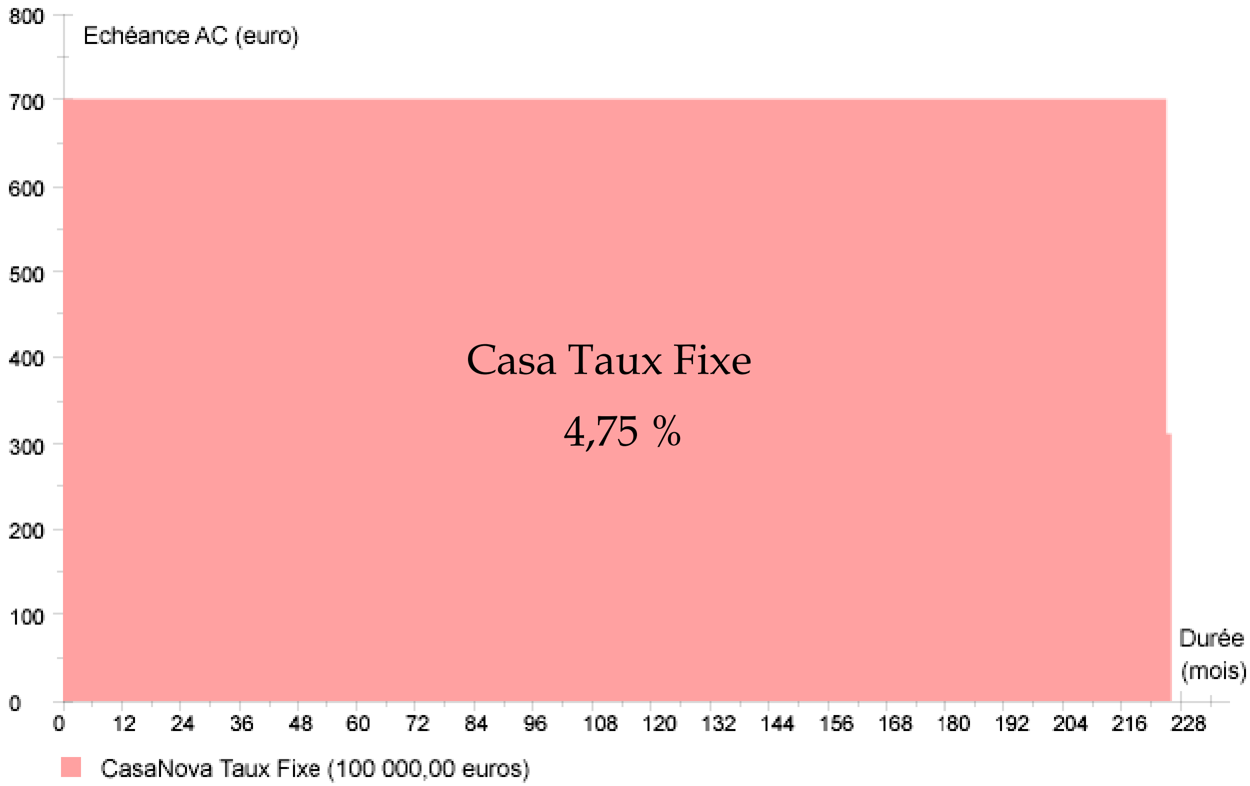
coût : 10 427 € + 2 466 € = 12 893 €



Cas pratiques

<u>SDF n° 1 :</u> BF : 100 000 € MS : 700 €

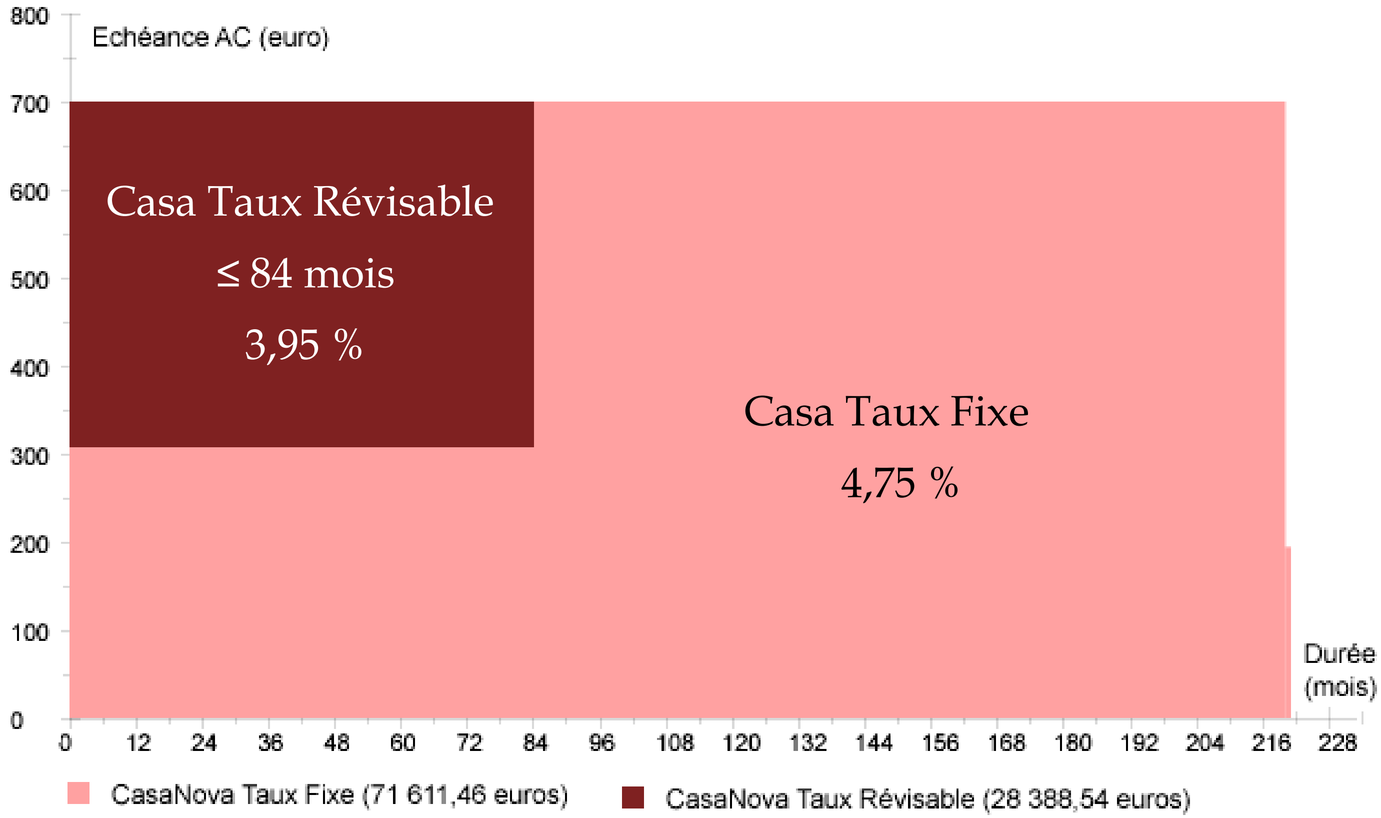
coût : 58 712 € 226 mois



Cas pratiques

SDF n° 2 : BF : 100 000 € MS : 700 €

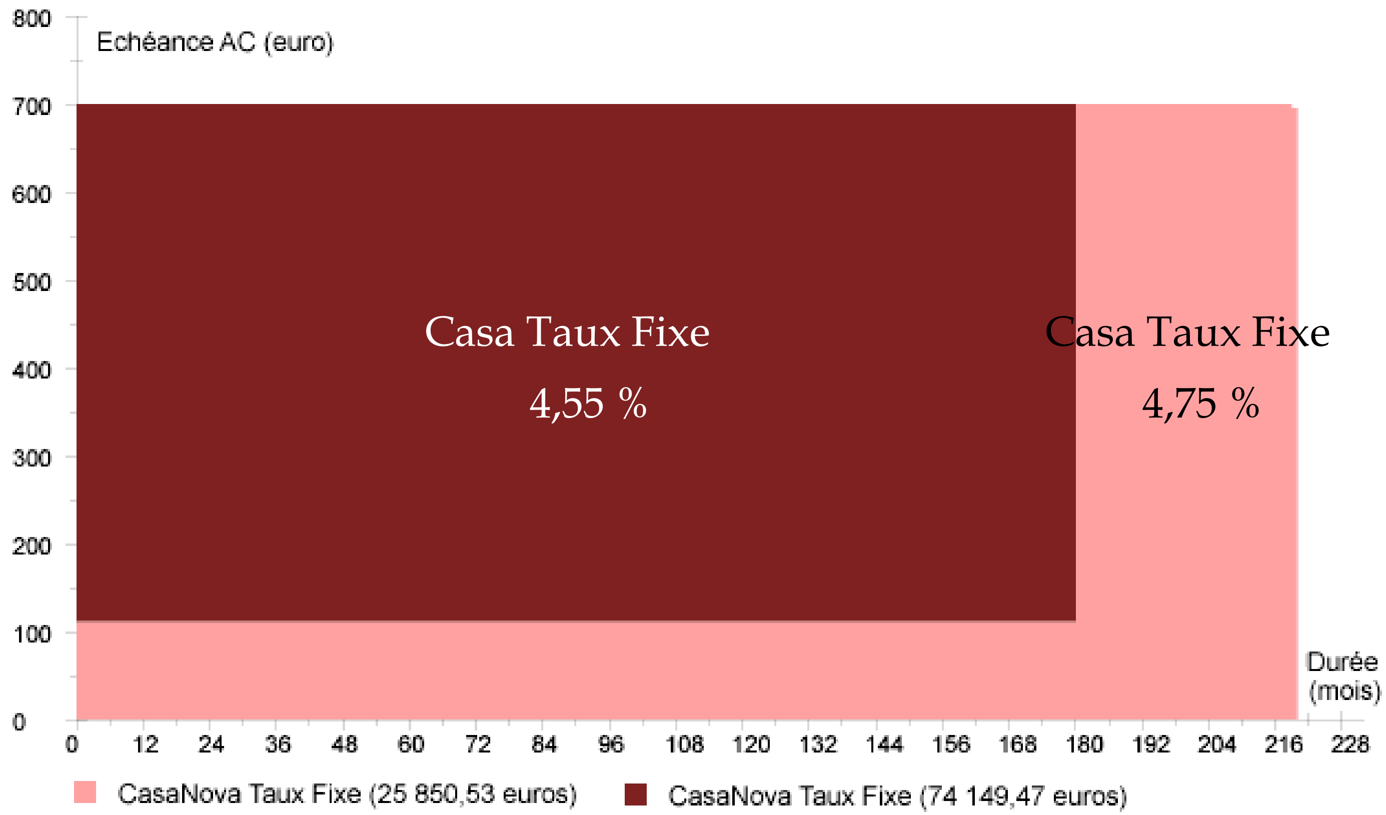
coût : 55 095 € 221 mois gain : 6,1 %



Cas pratiques

SDF n° 3 : BF : 100 000 € MS : 700 €

coût : 35 895 € 220 mois gain : 6,5 %



Conclusion

Les suites envisagées/envisageables :

- optimisation stratégique et globale (SIAD 2.0)
approche bi-objectif banque vs. client

- développer les aspects statistiques et probabilistes :
approche globale du profit/risque (via scores ?)

- SIAD spécifique à l'investissement immobilier (In Fine) :
optimisation globale = optimisation fiscale