

Optimisation de plans de financement immobiliers

Frédéric GARDI et Alain DAVID

PROLOGIA S.A. – Groupe EXPERIAN
Parc Scientifique et Technologique de Luminy, Marseille, France
{frederic.gardi,alain.david}@prologia.fr

1 Introduction

Bien que le champ d'application privilégié de la recherche opérationnelle demeure autour des métiers de l'industrie, de nombreux problèmes décisionnels émergent dans les secteurs de la finance, de la banque et de l'assurance, faisant clairement apparaître un besoin d'aide à la décision. Dans le domaine financier, plusieurs problèmes ont été étudiés dont l'optimisation de portefeuilles, devenu un classique du genre, ou encore l'ordonnement des mouvements de trésorerie. À ce jour, nous n'avons eu connaissance d'aucun article de la littérature scientifique ou spécialisé traitant de recherche opérationnelle dans le domaine bancaire. Pourtant, les métiers de la banque, en particulier l'actuariat, sont des métiers complexes, souvent très techniques, dans lesquels la recherche opérationnelle, encore absente, est amenée à jouer un rôle important. En effet, la complexité croissante des produits bancaires et financiers, ainsi que des réglementations qui les régissent, obligent les différents acteurs du domaine à s'équiper d'outils informatiques avancés d'aide à la décision, voire d'optimisation, pour faire face à la concurrence. Dans cette note, nous abordons une problématique qui est aujourd'hui au cœur du domaine bancaire : l'optimisation de plans de financement immobiliers.

Le financement d'une opération immobilière requiert d'importantes sommes d'argent, généralement prêtées par une banque ou un organisme de crédit. Si beaucoup de banques peuvent proposer des financements adossés à des assemblages de prêts, ceux-ci demeurent limités par de nombreuses contraintes liées tant à la technicité de ces prêts que par des outils de calculs classiques. En majorité, les plans de financement se contentent d'un seul prêt dont l'échéance est constante sur la durée de ce celui-ci. Seuls quelques organismes spécialisés dans le crédit immobilier pratiquent des assemblages de prêts, réalisés "à la main" par des experts. Une grande banque française – que nous ne pouvons encore nommer aujourd'hui – a fait évoluer ses produits et souhaite pratiquer des assemblages de prêts, notamment à l'aide de prêts au profil plus souple, afin de proposer des plans de financement les plus compétitifs possibles. Pour aider les chargés de clientèle dans ce travail et être certain de proposer les meilleures solutions à ses clients, celle-ci a décidé d'intégrer à son nouvel outil informatique d'instruction de prêts immobiliers – entièrement développé par PROLOGIA – un module d'optimisation de plans de financement immobiliers. Ce module, qui a demandé près d'un an de recherche et développement, entrera en production dans le réseau des 2000 agences de cette banque avant la fin de l'année 2005.

2 Présentation du problème

Un prêt possède, de manière très générale, les caractéristiques suivantes : un montant minimum M_{min} , un montant maximum M_{max} , une durée minimum D_{min} , une durée maximum D_{max} , un montant d'amortissement mensuel minimum C_{min} et pour chaque durée d possible, le taux T_d associé à cette durée. Précisons que les montants sont exprimés en centimes, les durées en mois et les taux en %. Lorsqu'un prêt est inclus dans un plan de financement, son montant m , sa durée d et ses échéances de remboursement e_1, e_2, \dots, e_d doivent satisfaire les contraintes suivantes, où $[x]$ dénote l'entier le plus proche de x : $M_{min} \leq m \leq M_{max}$, $D_{min} \leq d \leq D_{max}$, $c_1 = e_1 - [T_d \times m]$ et pour tout $j = 2, \dots, d$, $c_j = e_j - [T_d \times (m - \sum_{k=1}^{j-1} c_k)]$, avec $c_1, c_2, \dots, c_d \geq C_{min}$. Deux types de profil d'échéances sont généralement considérés : constant ou libre. Les échéances d'un prêt à profil constant doivent toutes être égales sur la durée de celui-ci, tandis que celles d'un prêt à profil libre peuvent varier librement au cours de sa durée. Toutefois, pour des raisons commerciales, il n'est pas souhaitable que l'évolution des échéances d'un prêt à profil libre soit trop chaotique : cette

contrainte “métier” se traduira par la minimisation du nombre de paliers induits par les échéances des différents prêts du plan de financement comme objectif second.

Certains prêts, soutenus par l’État, ont des caractéristiques réglementaires plus complexes. Les prêts “épargne logement” (PEL, CEL) ont des montants minimum et maximum qui dépendent de la durée de l’emprunt. De plus, leur taux d’emprunt est fonction du taux et du montant d’emprunt sur chacun des plans ou comptes composant le prêt. Les prêts “à taux zéro” (PTZ, PPL) ne peuvent intégrer un plan de financement qu’à certaines conditions. Par exemple, le PPL ne peut appartenir au plan de financement que si la moitié du besoin total de financement est couvert par des prêts de plus de quinze ans. Enfin, d’autres contraintes, que nous ne détaillerons pas ici, accroissent encore la complexité du problème : la possibilité de différer l’amortissement de l’emprunt sur certains prêts, la prise en compte du paiement des assurances associées à chaque prêt, ainsi que d’autres contraintes de type “métier” comme par exemple la possibilité de forcer l’inclusion d’un prêt dans le plan de financement en fixant un montant minimum d’emprunt sur celui-ci.

Il y a alors deux façons de définir ce que l’on entend par « optimiser un plan de financement ». La première est la suivante : le client a une capacité maximum de remboursement (qui peut être différente chaque mois) et l’on cherche un plan de financement de coût minimum (c’est-à-dire minimisant la somme des intérêts remboursés par le client) dont l’échéance totale est chaque mois inférieure à cette capacité maximum. La seconde peut être formulé comme suit : le client souhaite que son remboursement s’étale sur une certaine durée. Le but est alors de trouver un plan de financement qui ne dépasse pas cette durée, tout en minimisant la valeur maximum de l’échéance totale sur la durée du plan (on cherche en quelque sorte à lisser la somme des échéances payées par le client).

3 Résolution : difficultés et idées

La difficulté majeure est que le problème d’optimisation que l’on obtient, même dans sa forme la plus réduite, est complètement combinatoire. En effet, toutes les variables du problème sont discrètes, exprimées en centimes lorsqu’il s’agit de montants et en mois lorsqu’il s’agit de durées. De plus, certaines contraintes (liées aux prêts réglementés) s’expriment de façon non linéaires en fonction des variables du problème. De fait, le problème devient très difficile à résoudre de manière exacte dès lors que quelques prêts sont susceptibles d’intégrer le plan de financement. À cela viennent s’ajouter deux difficultés opérationnelles. Le chargé de clientèle doit pouvoir présenter dans l’immédiat une ou plusieurs solutions au client, ce qui ne laisse qu’un temps de calcul très court à l’optimisation (moins d’une seconde). Ensuite, les plans de financement optimisés sont voués à être commercialisés en l’état, sans retouche de la part du chargé de clientèle ; par conséquent, aucune erreur numérique n’est tolérée, d’autant moins que les résultats doivent être compatibles avec ceux attendus par la chaîne de gestion des prêts.

Les actuaires de cette grande banque française ont développé il y a quelques années un outil qui permet l’assemblage d’un nombre limité de prêts possédant des caractéristiques précises, en procédant à une énumération orientée “métier” des solutions. Ici, la définition très générique du problème empêche toute tentative de résolution en temps réel par force brute. L’idée maîtresse sur laquelle repose notre schéma de résolution est la modélisation du problème sous la forme d’un programme linéaire en nombres entiers. La résolution s’opère alors en quatre phases. Tout d’abord, lorsque cela est possible, une première solution admissible est calculée à l’aide d’un seul prêt de façon à obtenir une borne supérieure. Ensuite, une solution non admissible, mais dont le profil est très proche de celui de la solution optimale, est calculée par programmation linéaire en nombres entiers. En effet, lorsque l’on relâche les contraintes d’intégrité portant sur les variables du problème représentant les montants, une grande partie du programme sous-jacent peut s’écrire à l’aide d’(in)équations linéaires. Un premier programme est résolu par *branch-and-bound*, dans lequel les contraintes les plus difficiles à linéariser sont posées de façon approchée, voire omises. La résolution d’un second programme dans lequel ces contraintes difficiles sont réintégrées permet alors d’obtenir une solution presque admissible et très proche en terme de coût de la solution optimale. Enfin, celle-ci est retouchée de manière à obtenir une solution respectant les règles d’arrondis imposées par la chaîne de gestion, et esthétique d’un point de vue commercial.

Ce schéma de résolution nous permet d’obtenir en temps réel des plans de financement qu’il serait impossible de calculer manuellement. Les solutions obtenues, parfois surprenantes, font apparaître des gains en faveur du client pouvant s’élever jusqu’à 10 % du coût d’une solution “naïve”.