Ordonnancement avec exclusion mutuelle par un graphe d'intervalles ou d'une classe apparentée : complexité et algorithmes

~

Frédéric Gardi

- 14 Juin 2005 -

- Faculté des Sciences de Luminy -

Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille

Université de la Méditerranée – Aix-Marseille II

Plan de l'exposé

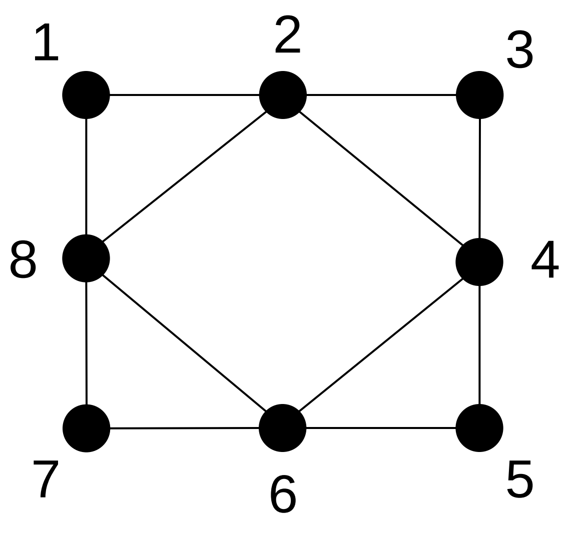
1. Introduction
2. Exclusion mutuelle par un graphe d'intervalles
3. Exclusion mutuelle par un graphe d'arcs ou de tolérances
4. Une condition suffisante pour l'optimalité
5. Sur certains problèmes de partition relatifs aux graphes d'intervalles
6. Conclusion et perspectives

Présentation du problème

Problème fondamental en théorie de l'ordonnancement :

ordonnancer n tâches sur k processeurs en le minimum de temps, certaines tâches ne pouvant être exécutées en parallèle (partage des ressources)

conflits entre les tâches → graphe d'exclusion mutuelle

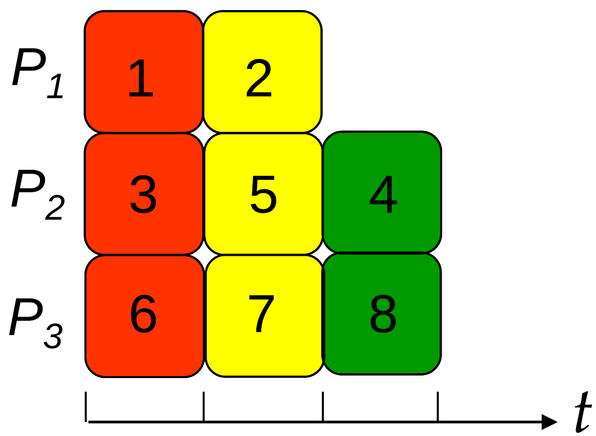


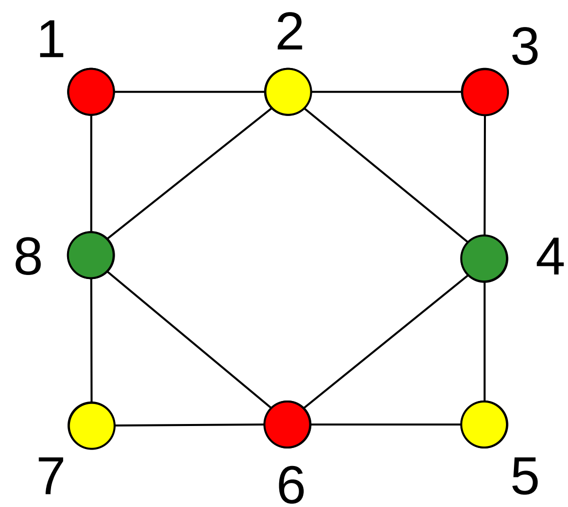
Présentation du problème

lorsque toutes les tâches ont le même temps d'exécution

⬇

ordonnancement = coloration du graphe tel que chaque couleur n'apparaisse pas plus de *k* fois





Présentation du problème

Ordonnancement avec Exclusion Mutuelle (ORDO) :

Entrée : un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif k ;

Sortie : une coloration minimum de G où chaque couleur apparaît au plus k fois.

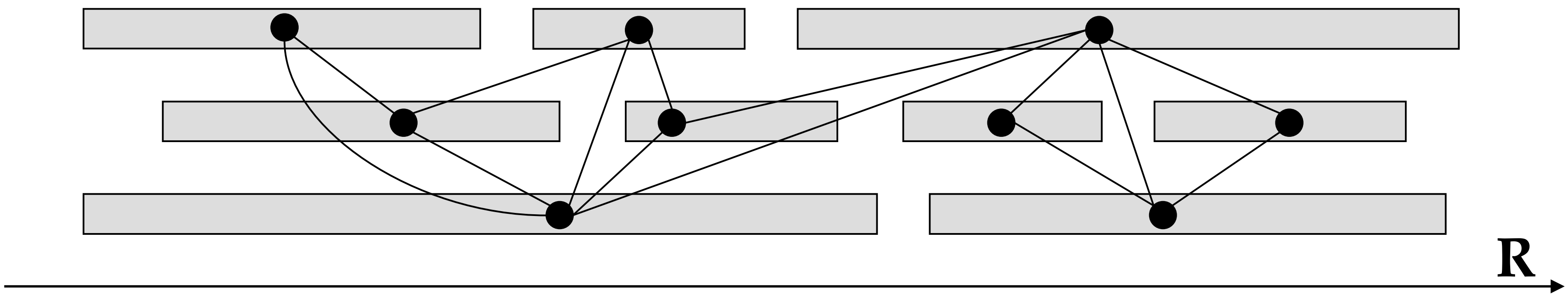
[Baker et Coffman 1996]

Problème de la coloration minimum déjà *NP*-difficile

→ restriction aux classes de graphes colorables en temps polynomial (ex : graphes parfaits)

Graphes d'intervalles

Représentation :



Domaines d'applications [Roberts 1976, Golumbic 1980] :

- génétique
- ordonnancement
- psychologie
- archéologie

Motivations

Problème de planification de personnel traité par la société PROLOGIA - Groupe Air Liquide :

n tâches journalières à affecter à des employés, chacune possédant une date de début et une date de fin

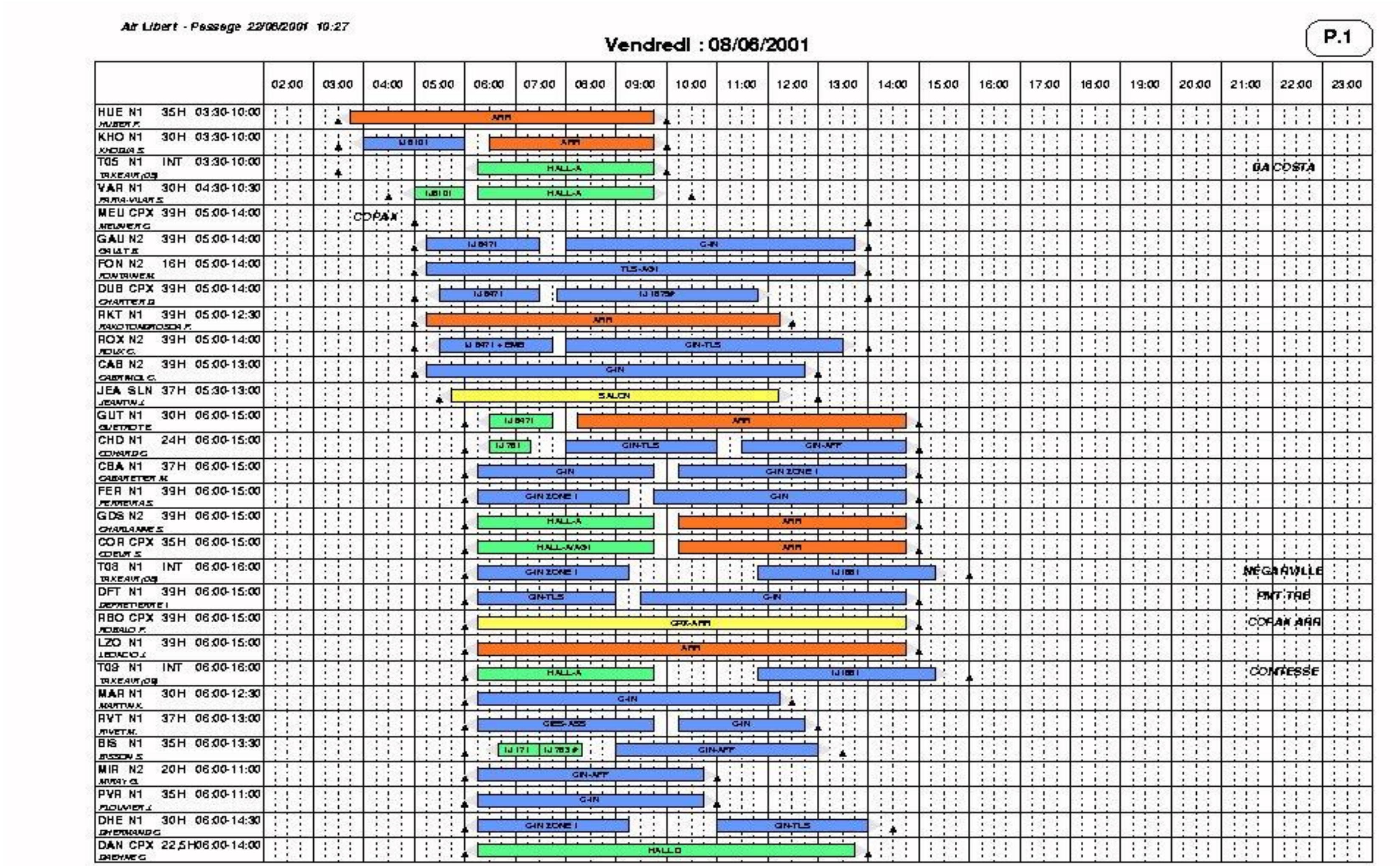
But : combien d'employés mobiliser ?

Contraintes :

- les tâches affectées à un employé ne se chevauchent pas
- pas plus de k tâches par employé ($k \leq 5$ fixé)

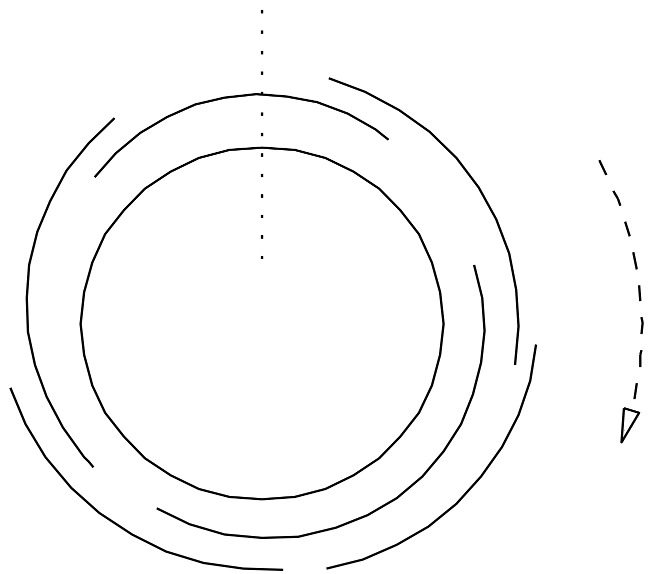
→ problème ORDO pour les graphes d'intervalles

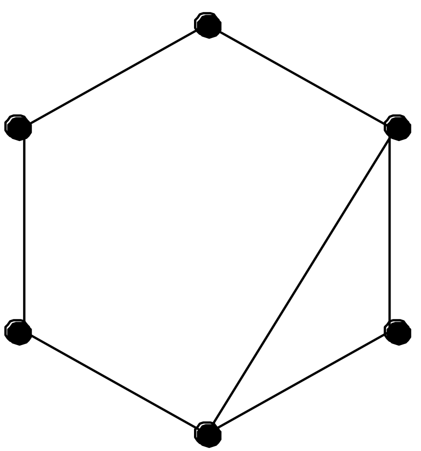
Motivations



Motivations

Planning cyclique :

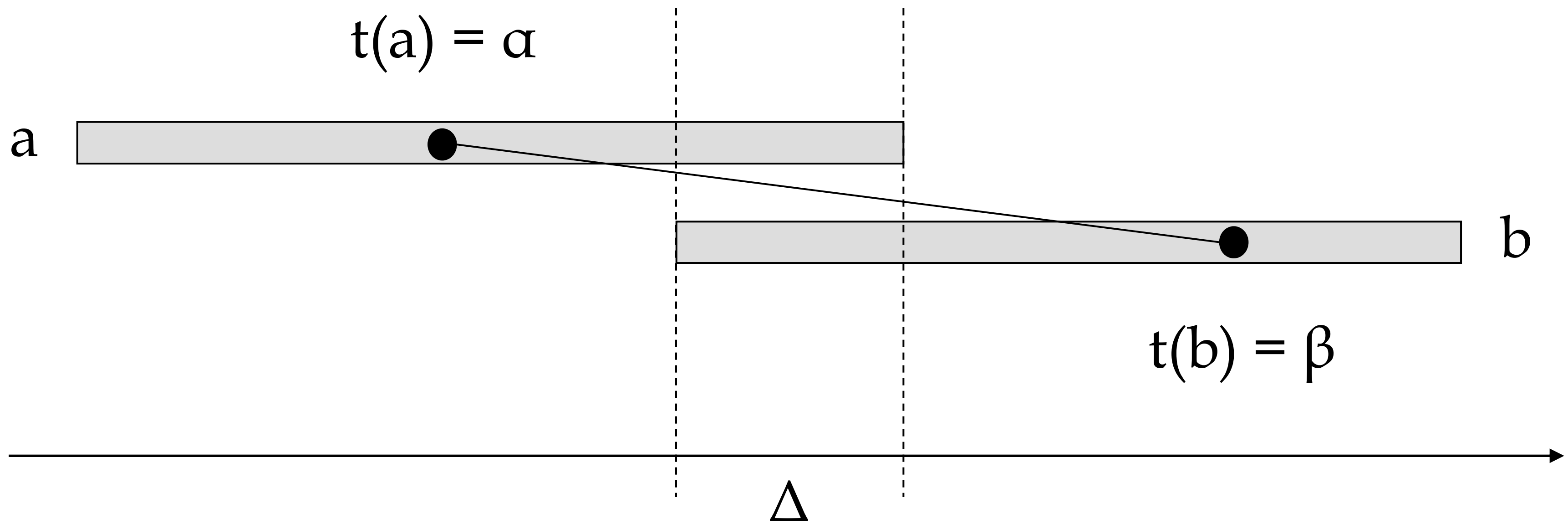




→ problème Ordo pour les graphes d'arcs circulaires

Motivations

Tolérance aux chevauchements :



→ problème ORDO pour les graphes de tolérances

État de l'art

Théorème [Bodlaender et Jansen 1995] :

Le problème ORDO est *NP*-difficile pour les graphes d'intervalles, même lorsque k est un paramètre fixé supérieur ou égal à quatre.

Cas polynomiaux :

- graphes scindés [Lonc 1991]
- forêts [Baker et Coffman 1996]
- compléments de graphes fortement triangulés [Dalhaus et Karpinski 1998]
- graphes de largeur-arbre bornée [Bodlander et Fomin 2004]

Objectifs

Étudier de façon détaillée la complexité du problème Ordo pour les classes de graphes apparentés aux graphes intervalles :

- exhiber des cas polynomiaux
- concevoir des algorithmes simples et efficaces

Établir une cartographie complète de la complexité du problème d'ordonnancement avec exclusion mutuelle

Plan de l'exposé

1. Introduction
2. Exclusion mutuelle par un graphe d'intervalles
3. Exclusion mutuelle par un graphe d'arcs ou de tolérances
4. Une condition suffisante pour l'optimalité
5. Sur certains problèmes de partition relatifs aux graphes d'intervalles
6. Conclusion et perspectives

Un nouvel algorithme pour $k = 2$

Théorème [Andrews et al. 2000] :

Le problème ORDO peut être résolu en $O(n \log n)$ pour les graphes d'intervalles lorsque $k = 2$.

Aspects négatifs :

- algorithme récursif complexe
- preuve de validité longue et fastidieuse

Nos travaux :

- algorithme simple en $O(n)$ si extrémités triées
- preuve de validité directe
- nouveaux algorithmes pour problèmes relatifs

Cas polynomiaux

Théorème :

Le problème ORDO peut être résolu en temps et espace linéaire pour :

- les graphes d'intervalles propres ;
- les graphes à seuil et les graphes scindés convexes.

Proposition :

Le problème ORDO pour les graphes scindés est aussi difficile que le problème du couplage maximum dans un graphe biparti.

Plan de l'exposé

1. Introduction
2. Exclusion mutuelle par un graphe d'intervalles
3. Exclusion mutuelle par un graphe d'arcs ou de tolérances
4. Une condition suffisante pour l'optimalité
5. Sur certains problèmes de partition relatifs aux graphes d'intervalles
6. Conclusion et perspectives

Le cas des graphes d'arcs propres

Théorème :

Le problème ORDO peut être résolu en temps $O(n^2)$ et espace linéaire pour les graphes d'arcs propres.

Preuve algorithmique : échanges bichromatiques

Théorème :

Le problème ORDO peut être résolu en temps et espace linéaire pour les graphes d'arcs propres, lorsque $k = 2$.

Preuve algorithmique : union de couplages

Le cas des graphes de tolérances bornées

Théorème :

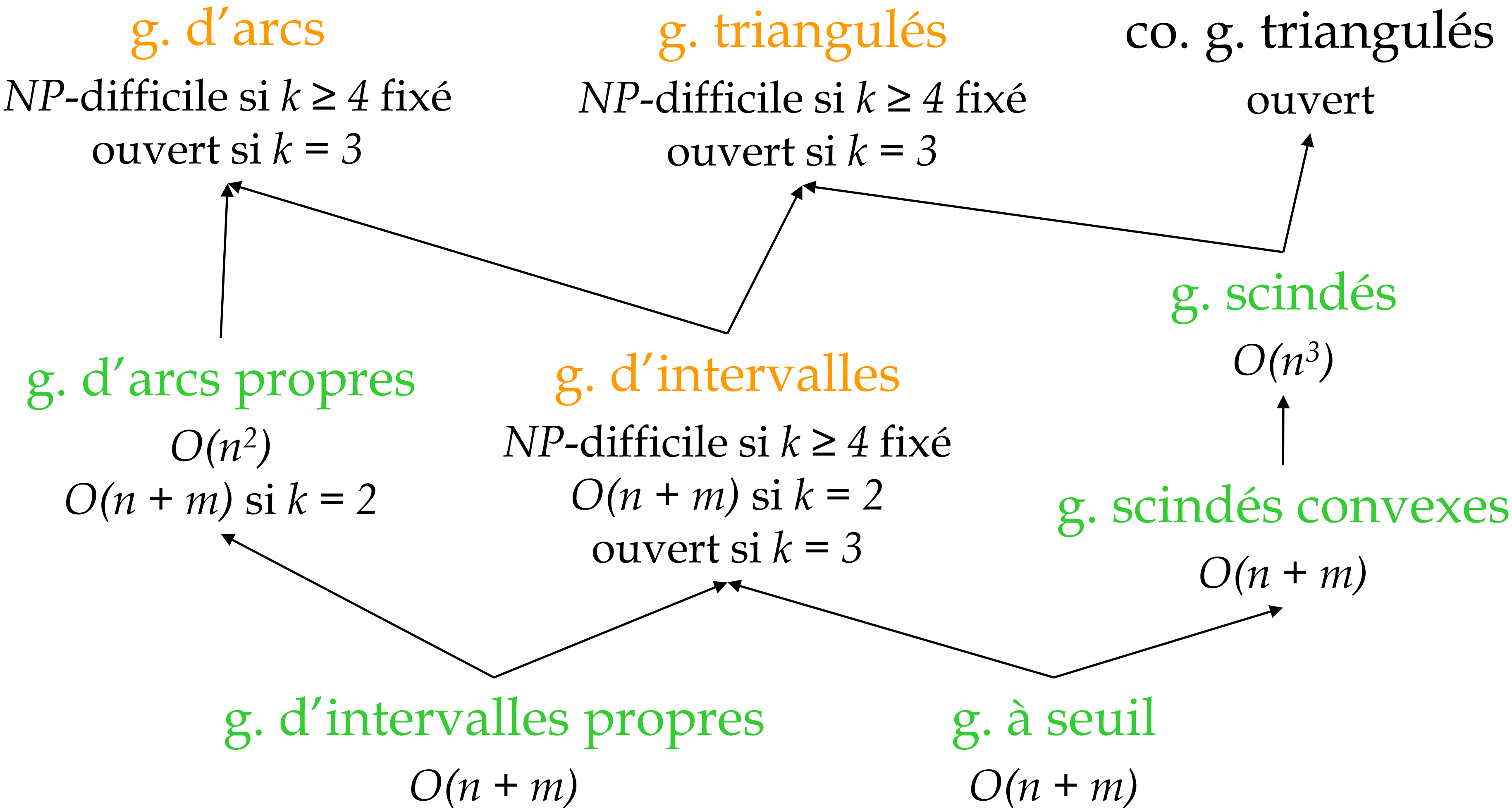
Lorsque *k* est un paramètre fixé supérieur ou égal à trois, le problème ORDO reste *NP*-difficile pour les graphes de tolérances bornées, même si :

- le plus grand stable dans le graphe est de taille $k + 1$;
- tout cycle de longueur supérieure ou égale à cinq possède deux cordes.

Réduction : COUPLAGE NUMÉRIQUE 3-D

[Bodlaender et Jansen 1995]

Synthèse


g. d'arcs
NP-difficile si $k \geq 4$ fixé
ouvert si $k = 3$
g. triangulés
NP-difficile si $k \geq 4$ fixé
ouvert si $k = 3$
co. g. triangulés
ouvert
g. scindés
$O(n^3)$
g. d'arcs propres
$O(n^2)$
$O(n + m)$ si $k = 2$
g. d'intervalles
NP-difficile si $k \geq 4$ fixé
$O(n + m)$ si $k = 2$
ouvert si $k = 3$
g. scindés convexes
$O(n + m)$
g. d'intervalles propres
$O(n + m)$
g. à seuil
$O(n + m)$

Synthèse

g. de Meyniel
NP-difficile si $k \geq 3$ fixé

co. g. de comparabilité
NP-difficile si $k \geq 3$ fixé

g. faibl. triangulés
NP-difficile si $k \geq 3$ fixé

g. triangulés
NP-difficile si $k \geq 4$ fixé
ouvert si $k = 3$

g. de tolérances bornées
NP-difficile si $k \geq 3$ fixé

g. d'intervalles
NP-difficile si $k \geq 4$ fixé
$O(n + m)$ si $k = 2$
ouvert si $k = 3$

Plan de l'exposé

1. Introduction
2. Exclusion mutuelle par un graphe d'intervalles
3. Exclusion mutuelle par un graphe d'arcs ou de tolérances
4. Une condition suffisante pour l'optimalité
5. Sur certains problèmes de partition relatifs aux graphes d'intervalles
6. Conclusion et perspectives

Une condition suffisante pour l'optimalité

Condition : le graphe G des conflits admet une coloration où chaque couleur apparaît au moins k fois.

Propriété de redécoupage : si G satisfait la condition, alors celui-ci admet une partition optimale en $\lceil n/k \rceil$ stables de taille au plus k.

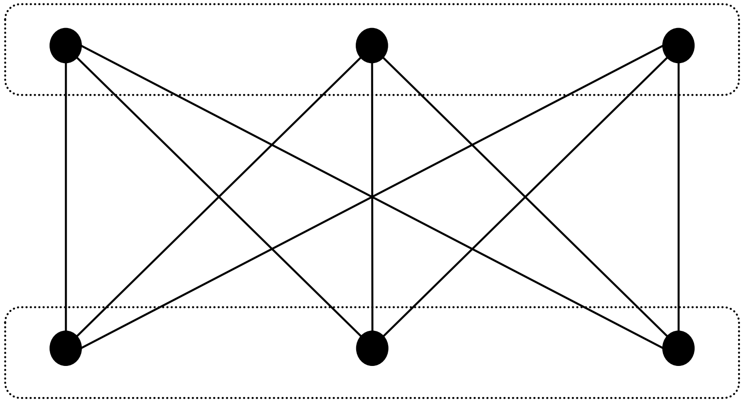
Intérêts :

- condition satisfaite en pratique
- conception d'algorithmes d'approximation

Une condition suffisante pour l'optimalité

Contre-exemple :

Le graphe biparti complet $K_{k+1,k+1}$ ne vérifie pas la propriété de redécoupage, quel que soit $k \geq 2$.



Le graphe biparti complet $K_{3,3}$

Une condition suffisante pour l'optimalité

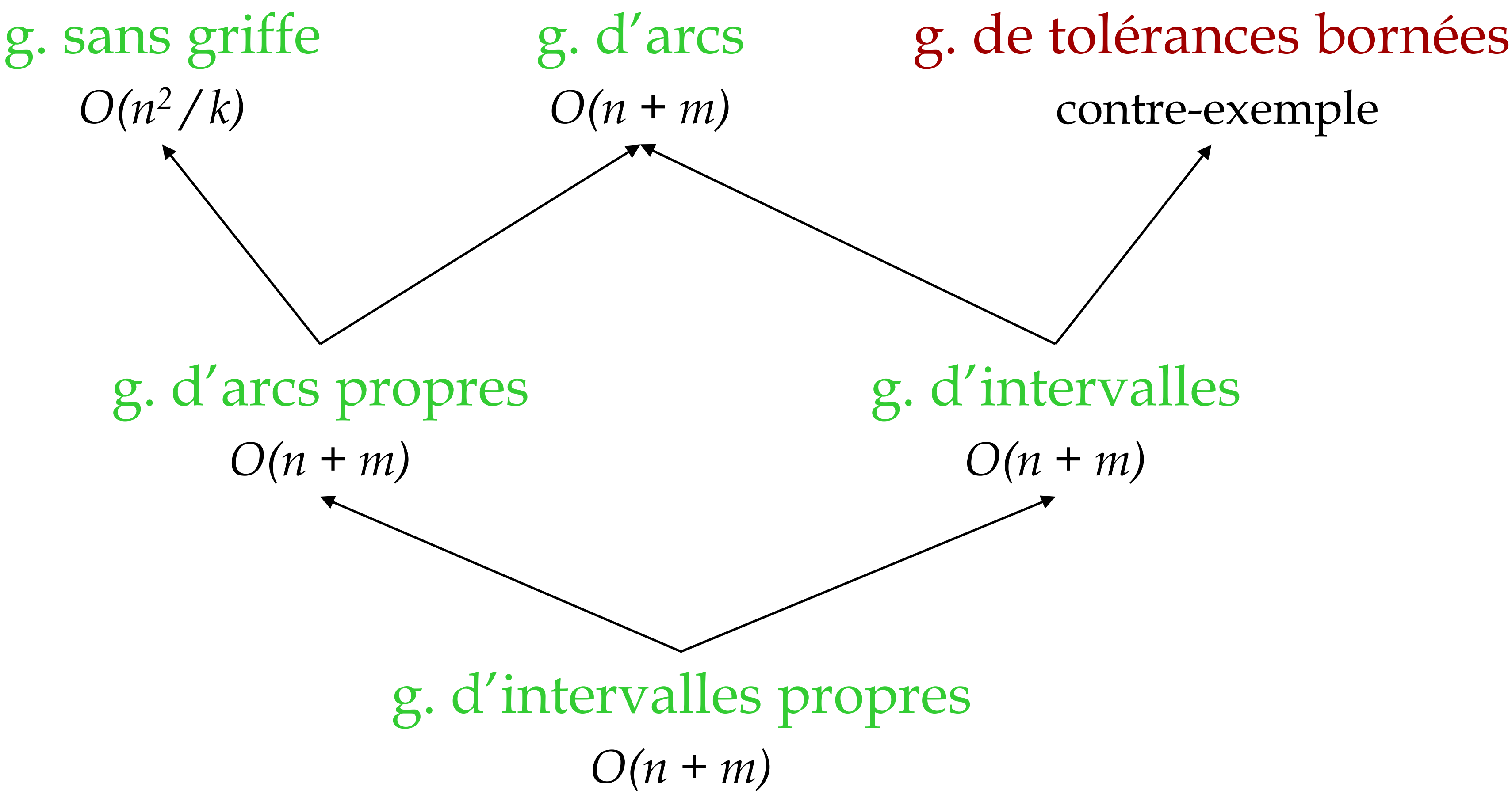
Théorème :

La propriété de redécoupage est vérifiée par :

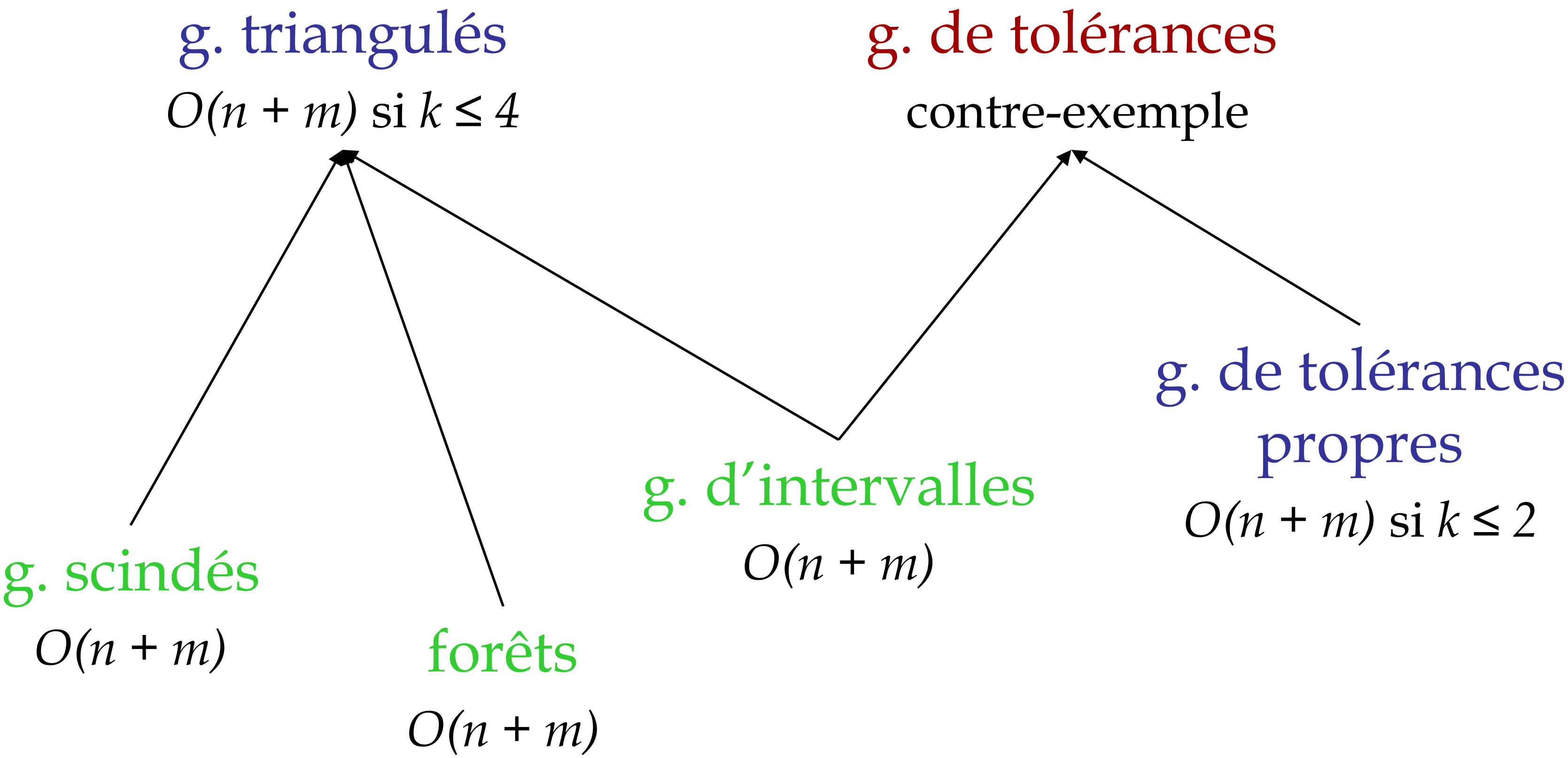
- les graphes sans griffe ;
- les graphes d'intervalles et d'arcs ;
- les graphes de tolérances propres, pour $k = 2$;
- les graphes scindés et les forêts ;
- les graphes triangulés, pour $k \leq 4$.

+ algorithmes efficaces pour calculer un redécoupage, étant donnée en entrée une coloration satisfaisant la condition.

Synthèse


g. sans griffe
$O(n^2 / k)$
g. d'arcs
$O(n + m)$
g. de tolérances bornées
contre-exemple
g. d'arcs propres
$O(n + m)$
g. d'intervalles
$O(n + m)$
g. d'intervalles propres
$O(n + m)$

Synthèse


g. triangulés
$O(n + m)$ si $k \leq 4$
g. de tolérances
contre-exemple
g. de tolérances propres
$O(n + m)$ si $k \leq 2$
g. d'intervalles
$O(n + m)$
g. scindés
$O(n + m)$
forêts
$O(n + m)$

Plan de l'exposé

1. Introduction
2. Exclusion mutuelle par un graphe d'intervalles
3. Exclusion mutuelle par un graphe d'arcs ou de tolérances
4. Une condition suffisante pour l'optimalité
5. Sur certains problèmes de partition relatifs aux graphes d'intervalles
6. Conclusion et perspectives

Partition en sous-graphes d'intervalles propres

Théorème :

Tout graphe d'intervalles admet une partition en $\lceil \log_3 n \rceil$ sous-graphes d'intervalles propres. De plus, cette borne est atteinte de façon asymptotique pour une famille infinie de graphes d'intervalles.

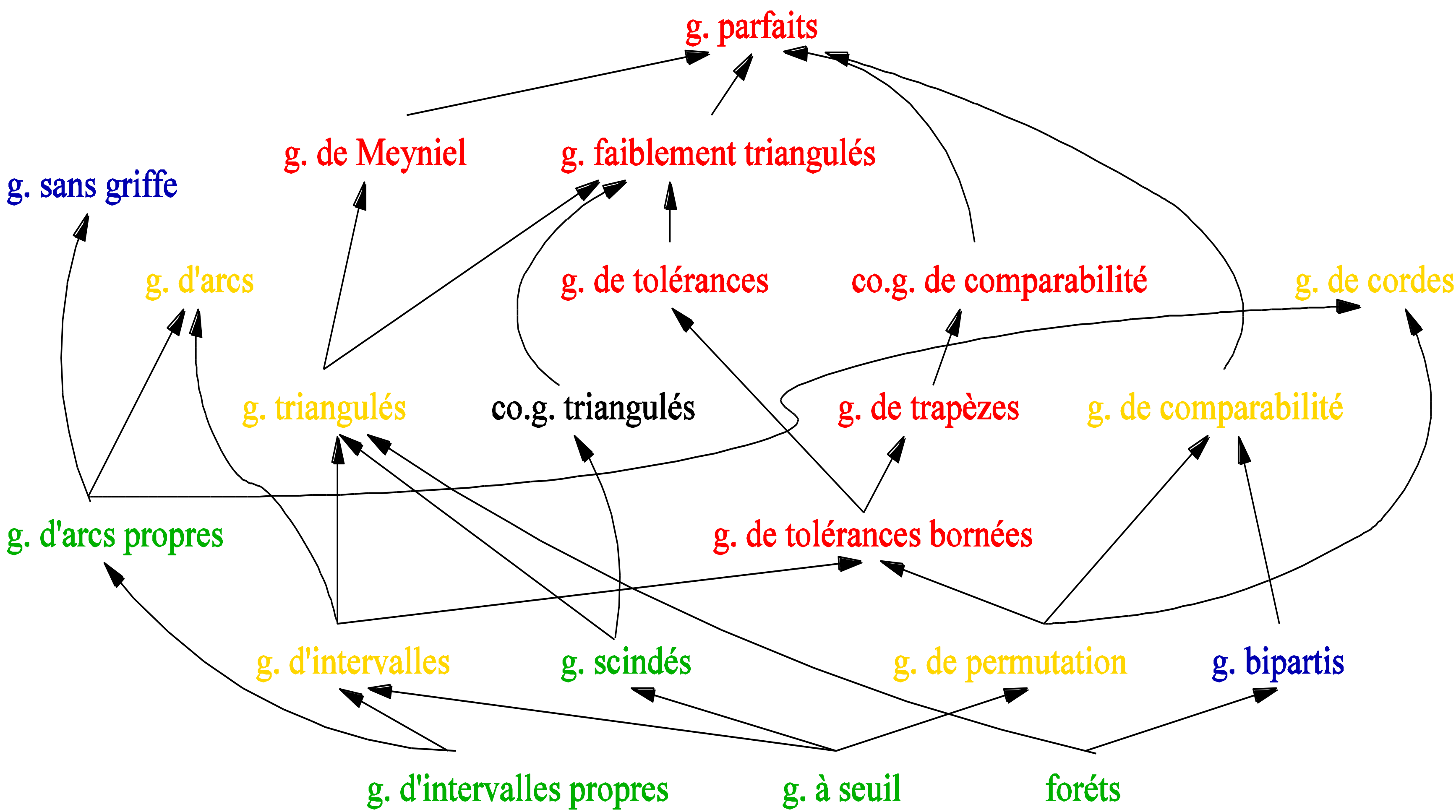
Preuve constructive :

Algorithme récursif en temps $O(n \log n + m)$ et espace $O(n)$ calculant la partition.

Plan de l'exposé

1. Introduction
2. Exclusion mutuelle par un graphe d'intervalles
3. Exclusion mutuelle par un graphe d'arcs ou de tolérances
4. Une condition suffisante pour l'optimalité
5. Sur certains problèmes de partition relatifs aux graphes d'intervalles
6. Conclusion et perspectives

Conclusion


g. parfaits
g. de Meyniel
g. faiblement triangulés
g. sans griffe
g. d'arcs
g. de tolérances
co.g. de comparabilité
g. de cordes
g. triangulés
co.g. triangulés
g. de trapèzes
g. de comparabilité
g. d'arcs propres
g. de tolérances bornées
g. d'intervalles
g. scindés
g. de permutation
g. bipartis
g. d'intervalles propres
g. à seuil
foréts

Perspectives

Poursuite du travail de classification :

- graphes d'intervalles lorsque $k = 3$
- graphes de permutation lorsque $k = 3, 4, 5$
- compléments de graphes triangulés

Poursuite de l'étude menée sur la propriété de redécoupage :

- graphe de tolérances propres
- graphes triangulés et extensions

Autres modèles issus de la planification de personnel :

- somme des durées des tâches ≤ D
- fin de la dernière tâche – début de la première ≤ D